CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200, EMAP-P0-300, EMAP-P0-400, EMAP-P0-660, EMAP-P0-700, EMAP-P0-Q00
Termin egzaminu:	5 maja 2026 r.
Data publikacji dokumentu:	26 czerwca 2026 r.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Uwaga:
Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego, dopisano „G”.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz.U. z 2012 r. poz. 977, z późn. zm., tj. Dz.U. z 2014 r. poz. 803, Dz.U. z 2016 r. poz. 895).

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach; 1.5) wykorzystuje podstawowe własności potęg […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G8.3) odczytuje z wykresu funkcji: […] argumenty dla danej wartości funkcji […]. 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje […]; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] zbiór wartości […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] maksymalne przedziały, w których funkcja […] ma stały znak […]).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.12) wykorzystuje własności funkcji liniowej […] do interpretacji zagadnień geometrycznych […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.12) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień […] fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym).

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus […] kątów o miarach od $0°$ do $180°$.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.21) konstruuje okrąg opisany na trójkącie […]; G10.22) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje […] cechy podobieństwa trójkątów.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa […] do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni […] graniastosłupa prostego […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G11.2) oblicza […] objętość […] walca, stożka […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
D

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) […] stosuje regułę mnożenia […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G9.4) wyznacza średnią arytmetyczną […] zestawu danych.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

ZADANIA OTWARTE

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty)$

ALBO

– zastosowanie poprawnej metody i przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów, np.

1 pkt – obliczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 2x - 8$:

$x_1 = -\frac{4}{3}$ oraz $x_2 = 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Odpowiedź zdającego uznajemy za poprawną tylko wtedy, gdy można w sposób jednoznaczny ustalić, czy przedziały zapisane przez zdającego są otwarte czy domknięte.

2. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu $3x^2 - 2x - 8$, popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np. $3x^2 + 4x$), i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np. $3x^2 + 4x \geq 0$), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli zdający poda zbiór rozwiązań w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów i jednocześnie zapisze niewłaściwy zbiór rozwiązań, np. $x \in \left[-\frac{4}{3}, 2\right]$ lub $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

6. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez dwumian $3x + 4$ bez rozpatrywania znaku tego dwumianu, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający spełni kryterium za 1 punkt, a następnie pomyli porządek liczb na osi liczbowej przy zachowaniu poprawnych krańców przedziału, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 2] \cup \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ lub w postaci $\left(+\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, -\infty)$, to otrzymuje **2 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zapisujemy nierówność w postaci $3x^2 - 2x - 8 \geq 0$ i obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 3x^2 - 2x - 8$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $3x^2 - 2x - 8$:

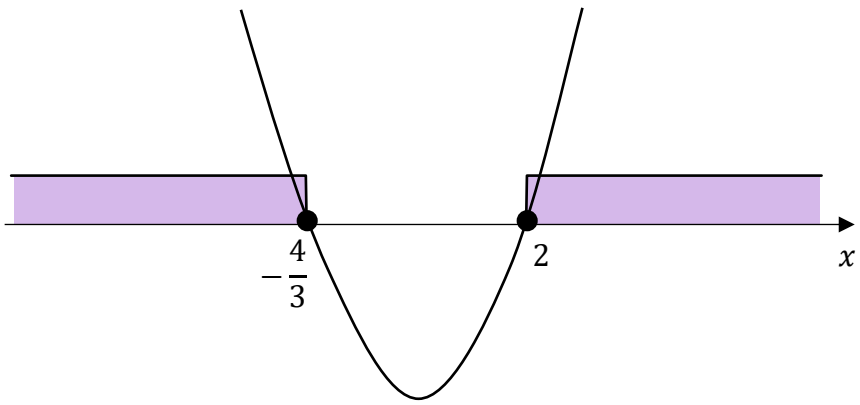
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100$$

Stąd:

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = 2$$

Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej $y = 3x^2 - 2x - 8$.
Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty)$.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Sposób II

Przekształcamy nierówność równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$3x^2 + 4x \geq 6x + 8$$

$$x(3x + 4) \geq 2(3x + 4)$$

$$x(3x + 4) - 2(3x + 4) \geq 0$$

$$(3x + 4)(x - 2) \geq 0$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = (3x + 4)(x - 2)$:

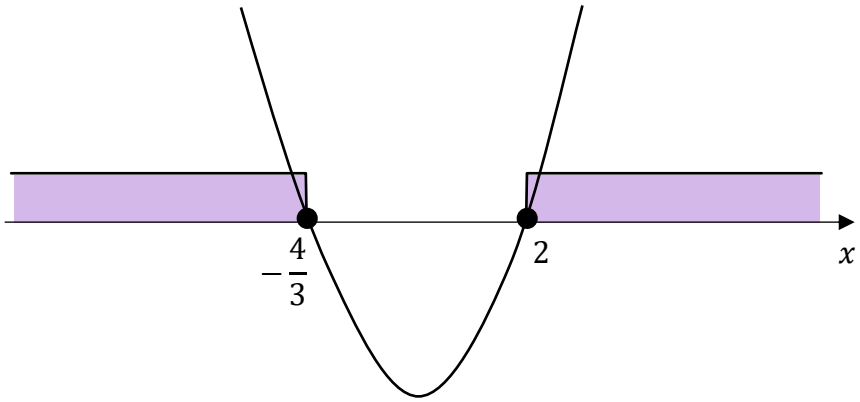
$$(3x + 4)(x - 2) = 0$$

$$3x + 4 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{4}{3} \quad \text{lub} \quad x = 2$$

Miejscami zerowymi funkcji $y = (3x + 4)(x - 2)$ są liczby: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 2$.

Szkicujemy wykres funkcji kwadratowej $y = (3x + 4)(x - 2)$.
Odczytujemy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty)$.

Sposób III

Przekształcamy nierówność równoważnie i stosujemy metodę grupowania wyrazów:

$$3x^2 + 4x \geq 6x + 8$$

$$x(3x + 4) \geq 2(3x + 4)$$

$$x(3x + 4) - 2(3x + 4) \geq 0$$

$$(3x + 4)(x - 2) \geq 0$$

Dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest równoważność:

$$a \cdot b \geq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (a \leq 0 \text{ i } b \leq 0) \text{ lub } (a \geq 0 \text{ i } b \geq 0)$$

Przekształcamy nierówność $(3x+4)(x-2) \geq 0$, na podstawie powyższej równoważności:

$$(3x+4 \leq 0 \text{ i } x-2 \leq 0) \text{ lub } (3x+4 \geq 0 \text{ i } x-2 \geq 0)$$

$$\left(x \leq -\frac{4}{3} \text{ i } x \leq 2\right) \text{ lub } \left(x \geq -\frac{4}{3} \text{ i } x \geq 2\right)$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \text{ lub } x \in [2, +\infty)$$

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $3x^2 + 4x \geq 6x + 8$ jest $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty)$.

<u>*Sposób IV*</u>

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$3x^2 + 4x \geq 6x + 8$$

$$x(3x+4) \geq 2(3x+4)$$

Rozważmy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $3x + 4 = 0$)

Rozwiązaniem równania $3x + 4 = 0$ jest liczba $\left(-\frac{4}{3}\right)$.

Dla $x = -\frac{4}{3}$ nierówność $x(3x+4) \geq 2(3x+4)$ jest prawdziwa.

Przypadek 2. (gdy $3x + 4 > 0$)

Zbiorem rozwiązań nierówności $3x + 4 > 0$ jest przedział $\left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Dzielimy stronami nierówność $x(3x+4) \geq 2(3x+4)$ przez dwumian $3x + 4$ i otrzymujemy $x \geq 2$.

Zatem $x \in \left(-\frac{4}{3}, +\infty\right)$ i $x \in [2, +\infty)$. Stąd otrzymujemy $x \in [2, +\infty)$.

Przypadek 3. (gdy $3x + 4 < 0$)

Zbiorem rozwiązań nierówności $3x + 4 < 0$ jest przedział $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$.

Dzielimy stronami nierówność $x(3x+4) \geq 2(3x+4)$ przez dwumian $3x + 4$ i otrzymujemy $x \leq 2$.

Zatem $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$ i $x \in (-\infty, 2]$. Stąd otrzymujemy $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$.

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $3x^2 + 4x \geq 6x + 8$ jest $\left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [2, +\infty) \cup \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$, czyli $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty)$.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

Zasady oceniania

2 pkt – przekształcenie nierówności $a(a-b) \geq b(a-3b)$ do postaci $(a-b)^2 + 2b^2 \geq 0$ **oraz** stwierdzenie, że suma $(a-b)^2 + 2b^2$ jest liczbą nieujemną jako suma dwóch liczb nieujemnych

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $a^2 - 2ba + 3b^2$ zmiennej a **oraz** uzasadnienie, że jest on niedodatni,

ALBO

– obliczenie wyróżnika trójmianu kwadratowego $3b^2 - 2ab + a^2$ zmiennej b **oraz** uzasadnienie, że jest on niedodatni.

1 pkt – przekształcenie nierówności $a(a-b) \geq b(a-3b)$ do postaci $(a-b)^2 + 2b^2 \geq 0$

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $a^2 - 2ba + 3b^2$ zmiennej a: $\Delta = -8b^2$,

ALBO

– obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $3b^2 - 2ab + a^2$ zmiennej b: $\Delta = -8a^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy nierówność $a(a-b) \geq b(a-3b)$ w sposób równoważny:

$$a^2 - ab \geq ab - 3b^2$$

$$a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 + 2b^2 \geq 0$$

Liczby $(a-b)^2$ oraz $2b^2$ są nieujemne, zatem suma $(a-b)^2 + 2b^2$ jest również liczbą nieujemną. To należało wykazać.

Sposób II (trójmian kwadratowy zmiennej a z parametrem b)

Przekształcamy równoważnie nierówność $a(a-b) \geq b(a-3b)$ i otrzymujemy:

$$a^2 - 2ba + 3b^2 \geq 0$$

Wyrażenie $a^2 - 2ba + 3b^2$ traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej a.
Obliczamy wyróżnik Δ trójmianu:

$$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3b^2$$

$$\Delta = 4b^2 - 12b^2$$

$$\Delta = -8b^2 \leq 0$$

Obliczony wyróżnik trójmianu kwadratowego jest niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej b.
Zatem funkcja kwadratowa $f(a) = a^2 - 2ba + 3b^2$ zmiennej a ma co najwyżej jedno miejsce zerowe, a ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji f nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja f przyjmuje wartości nieujemne dla każdej liczby rzeczywistej a.

Oznacza to, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b nierówność $a^2 - 2ba + 3b^2 \geq 0$ jest prawdziwa.
Zatem nierówność $a(a-b) \geq b(a-3b)$ również jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby rzeczywistej b. To należało wykazać.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G7.7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 78.

1 pkt – zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi pozwalającego obliczyć liczbę biletów ulgowych i liczbę biletów normalnych sprzedanych na przedstawienie, np.

$x + y = 200$ oraz $0{,}75 \cdot (35x + 25y) = 4665$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć liczbę biletów ulgowych sprzedanych na przedstawienie, np.

$35(200 - y) + 25y = \frac{4665}{0{,}75}$,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć liczbę biletów normalnych sprzedanych na przedstawienie, np.

$35x + 25(200 - x) = \frac{4665}{0{,}75}$,

ALBO

– zapisanie różnicy $\frac{4665}{0{,}75} - 25 \cdot 200$ **oraz** zapisanie różnicy $35 - 25$,

ALBO

– zapisanie różnicy $35 \cdot 200 - \frac{4665}{0{,}75}$ **oraz** zapisanie różnicy $35 - 25$,

ALBO

– zapisanie różnicy $\frac{4665}{0{,}75} - (25 \cdot 100 + 35 \cdot 100)$ **oraz** zapisanie różnicy $35 - 25$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający sprawdza warunki zadania dla wybranych par liczb x oraz y i wskaże właściwą odpowiedź, ale nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy:

x – liczba biletów normalnych sprzedanych na przedstawienie,

y – liczba biletów ulgowych sprzedanych na przedstawienie.

Po uwzględnieniu warunków zadania otrzymujemy:

$$x + y = 200 \quad \text{oraz} \quad 0{,}75 \cdot (35x + 25y) = 4665$$

Z pierwszego z tych równań wyznaczamy $x = 200 - y$ i podstawiamy w miejsce x do drugiego z równań, w wyniku czego otrzymujemy:

$$0{,}75 \cdot [35(200 - y) + 25y] = 4665 \quad /: 0{,}75$$

$$35(200 - y) + 25y = 6220$$

$$7000 - 35y + 25y = 6220$$

$$-10y = -780$$

$$y = 78$$

Na przedstawienie sprzedano 78 biletów ulgowych.

Sposób II

Przychód organizatorów ze sprzedaży biletów jest równy:

$$\frac{4665}{0{,}75} = 6220$$

Gdyby organizatorzy sprzedali wszystkie bilety po 35 złotych, to uzyskaliby przychód w wysokości $35 \cdot 200 = 7000$ złotych, a więc o $7000 - 6220 = 780$ złotych więcej niż w rzeczywistości.

Bilet normalny kosztuje o 10 złotych więcej niż bilet ulgowy.

Zatem organizatorzy sprzedali $780 : 10 = 78$ biletów ulgowych.

Uwaga.

Metodę zaprezentowaną w sposobie II można wykorzystać również dla dowolnej konfiguracji liczby biletów ulgowych i normalnych dających łącznie 200 biletów; np. gdyby organizatorzy sprzedali 30 biletów normalnych i 170 biletów ulgowych, to uzyskaliby przychód w wysokości $30 \cdot 35 + 170 \cdot 25 = 5300$ złotych, a więc o $6220 - 5300 = 920$ złotych mniej niż w rzeczywistości.

Bilet normalny kosztuje o 10 złotych więcej niż bilet ulgowy.

Zatem organizatorzy w rzeczywistości sprzedali o $920 : 10 = 92$ bilety ulgowe mniej – a więc sprzedali $170 - 92 = 78$ biletów ulgowych.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie pola trójkąta KNM w postaci $P_{KNM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |MN| \cdot \sin\alpha$ **oraz** zapisanie pola trójkąta NLM w postaci $P_{NLM} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |MN| \cdot \sin\alpha$

ALBO

– uzasadnienie, że wysokości trójkątów KNM i NLM poprowadzone z wierzchołka N są równe,

ALBO

– zapisanie pola trójkąta KNM w postaci $P_{KNM} = \frac{1}{2} \cdot |KN| \cdot h$ **oraz** zapisanie pola trójkąta NLM w postaci $P_{NLM} = \frac{1}{2} \cdot |NL| \cdot h$,

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$,

ALBO

– zapisanie związku $\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{|KN|}{|NL|}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. a) Jeżeli zdający zapisze $\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b}$ i w rozwiązaniu nie określa, że h reprezentuje wysokości trójkątów KNM i NLM poprowadzone z wierzchołka N, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

b) Jeżeli zdający zapisze $\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b}$ i w rozwiązaniu określa (np. na rysunku), że h reprezentuje wysokości trójkątów KNM i NLM poprowadzone z wierzchołka N, ale nie uzasadnia równości tych wysokości, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile nie popełnił innych błędów.

2. Jeżeli zdający przyjmuje konkretną wartość kąta, np. $|\sphericalangle LMK| = 90°$, i na tym opiera swoje rozumowanie, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenie: $|\measuredangle LMK| = 2\alpha$.

Odcinek MN zawiera się w dwusiecznej kąta LMK, więc $|\measuredangle NMK| = \alpha$ oraz $|\measuredangle LMN| = \alpha$.

Stosujemy wzór na pole trójkąta w zależności od długości dwóch boków i sinusa kąta między tymi bokami i otrzymujemy:

$$P_{KNM} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |MN| \cdot \sin\alpha$$

$$P_{NLM} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |MN| \cdot \sin\alpha$$

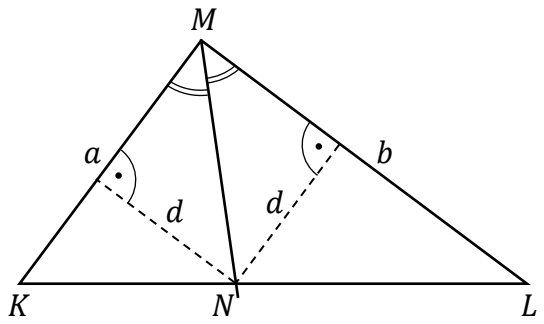
Zatem:

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot |MN| \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot |MN| \cdot \sin\alpha} = \frac{a}{b}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równoodległych od ramion tego kąta. Punkt N leży na dwusiecznej kąta LMK. Oznacza to, że odległości punktu N od półprostych MK i ML są równe. Zatem wysokości trójkątów KNM i NLM poprowadzone z wierzchołka N są równe. Oznaczmy tę wysokość przez d (zobacz rysunek).



Wtedy:

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot d}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot d} = \frac{a}{b}$$

To należało wykazać.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Sposób III

Trójkąty KNM i NLM mają wspólną wysokość h poprowadzoną z wierzchołka M, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy:

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |KN| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |NL| \cdot h} = \frac{|KN|}{|NL|}$$

Z twierdzenia o dwusiecznej zastosowanego w trójkącie KLM otrzymujemy:

$$\frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$$

Zatem:

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$$

To należało wykazać.

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 9.2) rozpoznaje w […] ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami […]; 9.6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $V = 128$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie wysokości ostrosłupa: $H = 4$

ALBO

– wyznaczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABCD} = \left(4\sqrt{6}\right)^2$ (lub $P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left(8\sqrt{3}\right)^2$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozpatruje bryłę inną niż ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

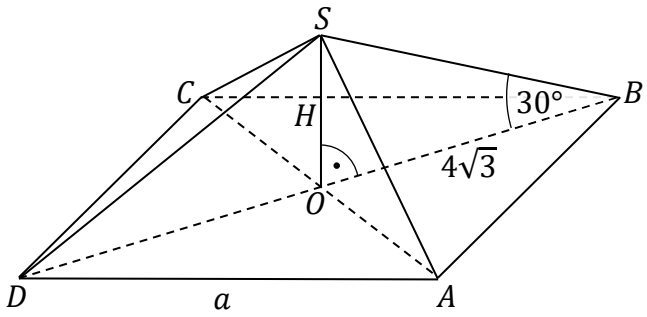
Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

a – długość krawędzi podstawy,

H – wysokość ostrosłupa,

O – spodek wysokości ostrosłupa.



Zauważamy, że $a > 0$ i $H > 0$.

Ponieważ O jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu, to $|OB| = 4\sqrt{3}$.

W trójkącie prostokątnym SOB mamy:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{|SO|}{|OB|} = \frac{H}{4\sqrt{3}}$$

Zatem:

$$H = 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4$$

Obliczamy objętość V ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(8\sqrt{3}\right)^2 \cdot 4 = 128$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A) = \frac{9}{25}$.

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych *LUB* obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń: $|\Omega| = 5 \cdot 5$, *LUB* sporządzenie tabeli o 25 polach odpowiadających zdarzeniom elementarnym, *LUB* sporządzenie pełnego drzewa stochastycznego
ALBO
– wypisanie (lub zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego niewłaściwego,
ALBO
– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 9$, o ile nie zostały zliczone błędne pary,
ALBO
– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, który zawiera wszystkie gałęzie sprzyjające zdarzeniu A, **oraz** zapisanie prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów doświadczenia,
ALBO
– podanie prawdopodobieństwa jednoelementowego zdarzenia (elementarnego): $\frac{1}{25}$,
ALBO
– zapisanie tylko $P(A) = \frac{9}{25}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 9 lub 25 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x \in \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ oraz $y \in \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$.

Liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych obliczamy z wykorzystaniem reguły mnożenia. Moc zbioru Ω jest równa $5 \cdot 5 = 25$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$(1, 2), (1, 8), (3, 0), (3, 6), (5, 4), (7, 2), (7, 8), (9, 0), (9, 6)$,

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

więc moc zbioru A jest równa 9.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{9}{25}$.

Sposób II

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb (x, y), gdzie $x \in \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ oraz $y \in \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$.

W tabeli literą $\mathcal{A}$ zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

$x \backslash y$	0	2	4	6	8
1		$\mathcal{A}$			$\mathcal{A}$
3	$\mathcal{A}$			$\mathcal{A}$	
5			$\mathcal{A}$		
7		$\mathcal{A}$			$\mathcal{A}$
9	$\mathcal{A}$			$\mathcal{A}$	

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest 25. Zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest 9.

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $\frac{9}{25}$.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$.

3 pkt – spełnienie jednego z kryteriów za 2 punkty **oraz** obliczenie wartości jednego ze współczynników a, b lub c funkcji f: $a=\frac{1}{2}$ lub $b=-3$, lub $c=\frac{5}{2}$.

2 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x)=a(x-3)^2-2$ **oraz** zapisanie, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x)=a(x-1)(x-5)$ lub $f(x)=a(x-1)^2-4a(x-1)$,

ALBO

– wykorzystanie wzoru funkcji g w postaci kanonicznej (lub iloczynowej) i zapisanie równania z jedną niewiadomą a, np. $0=a(0-2)^2-2$, $0=a(4-2)^2-2$, $-2=a\cdot 2\cdot(2-4)$,

ALBO

– zapisanie układu trzech niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b, c prowadzącego do obliczenia wartości współczynników a, b oraz c, np.:

$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$ oraz $\frac{-b}{2a}=3$ oraz $\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=-2$

lub

$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$ oraz $\frac{-b}{2a}=3$ oraz $a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=-2$.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x)=a(x-3)^2-2$

ALBO

– zapisanie, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1,

ALBO

– zapisanie, że wierzchołkiem wykresu funkcji g jest punkt o współrzędnych $(2,-2)$,

ALBO

– zapisanie, że drugim miejscem zerowym funkcji g jest liczba 4,

ALBO

– zapisanie układu dwóch niezależnych równań z trzema niewiadomymi a, b, c, np.:

$\frac{-b}{2a}=3$ oraz $\frac{-(b^2-4ac)}{4a}=-2$

lub

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

$\frac{-b}{2a} = 3$ oraz $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -2$,
lub
$a + b + c = 0$ oraz $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający obliczy poprawnie wartości współczynników a, b oraz c we wzorze funkcji f, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający poprawnie obliczy/poda

a) miejsce zerowe funkcji f, ale zapisze błędne równanie
$0 = a(1+3)^2 - 2$ lub
$0 = a(5+3)^2 - 2$, lub
$0 = a(1-3) - 2$, lub
$0 = a(5-3) - 2$,

b) miejsca zerowe funkcji f, ale zapisze błędne równanie
$-2 = a(3+1)(3+5)$ lub
$-2 = a(3+1)(3-5)$, lub
$-2 = a(3-1)(3+5)$,

a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający błędnie zidentyfikuje miejsce zerowe funkcji f jako (-1) lub 0, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy/poda

a) współrzędne wierzchołka wykresu funkcji g, ale zapisze błędne równanie
$0 = a(0+2)^2 - 2$,

b) współrzędne wierzchołka wykresu funkcji g oraz drugie miejsce zerowe tej funkcji, ale zapisze błędne równanie $-2 = a \cdot 2 \cdot (2+4)$ lub $4 = a(0-2)^2 - 2$,

a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli zdający błędnie zidentyfikuje wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji g, jako punkt $(4,-2)$ albo $(3,-1)$, albo $(3,-3)$, a następnie konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

6. Jeżeli zdający obliczy poprawnie wartość współczynnika a we wzorze funkcji g, lecz do wzoru funkcji f wstawia inną wartość tego współczynnika, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Ponieważ liczba 0 jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej g określonej wzorem $g(x) = f(x+1)$, więc:

$$g(0) = 0$$

Stąd:

$$f(0+1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Zatem:

$$a(1-3)^2 - 2 = 0$$

$$4a - 2 = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

Sposób II

Ponieważ liczba 0 jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej g określonej wzorem $g(x) = f(x+1)$, więc:

$$g(0) = 0$$

Stąd:

$$f(0+1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

To oznacza, że jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba 1.
Wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = 3$, zatem drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5.

Korzystamy ze wzoru na postać iloczynową funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = a(x-1)(x-5), \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Punkt $(3, -2)$ leży na wykresie funkcji f, więc:

$$f(3) = -2$$

$$a(3-1)(3-5) = -2$$

$$-4a = -2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci iloczynowej:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-5) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Sposób III

Korzystamy ze wzoru na postać ogólną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa 3. Zatem:

$$\frac{-b}{2a} = 3$$

$$b = -6a$$

Rzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa (-2). Zatem:

$$\frac{-\Delta}{4a} = -2$$

$$\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -2$$

Podstawiamy do ostatniego równania w miejsce b wyrażenie $(-6a)$ i otrzymujemy:

$$\frac{-((-6a)^2 - 4ac)}{4a} = -2$$

$$\frac{4a \cdot (-9a + c)}{4a} = -2$$

$$-9a + c = -2$$

$$c = 9a - 2$$

Ponieważ liczba 0 jest jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej g określonej wzorem $g(x) = f(x+1)$, więc:

$$g(0) = 0$$

Zatem:

$$f(0+1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$a + b + c = 0$$

Stąd i z uzyskanych wcześniej równań obliczamy wartości współczynników a, b oraz c:

$$a + (-6a) + (9a - 2) = 0$$

$$4a = 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = -6a = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

$$c = 9a - 2 = 9 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

Sposób IV

Korzystamy ze wzoru na postać ogólną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f wzdłuż osi Ox o 1 jednostkę w lewo. Zatem miejscem zerowym funkcji f jest liczba 1.
Wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = 3$, więc drugim miejscem zerowym funkcji f jest liczba 5. Stąd i z tego, że punkt $(3, -2)$ leży na wykresie funkcji f, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(5) = 0 \\ f(3) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 0 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -a - b \\ 25a + 5b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a + 5b - a - b = 0 \\ 9a + 3b - a - b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24a + 4b = 0 \quad /:4 \\ 8a + 2b = -2 \quad /:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Odejmując równania stronami, otrzymujemy:

$$(6a+b)-(4a+b)=0-(-1)$$
$$2a=1$$
$$a=\frac{1}{2}$$

Stąd:

$$b=-6a=-6\cdot\frac{1}{2}=-3 \quad \text{oraz} \quad c=-a-b=-\frac{1}{2}-(-3)=\frac{5}{2}$$

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci ogólnej:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$$

<u>*Sposób V*</u>

Wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f wzdłuż osi Ox o 1 jednostkę w lewo. Zatem wykresem funkcji g jest parabola o wierzchołku w punkcie $(2,-2)$.

Korzystamy ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej i zapisujemy:

$$g(x)=a(x-2)^2-2, \text{ gdzie } a\neq 0.$$

Ponieważ liczba 0 jest jednym z miejsc zerowych funkcji g, więc:

$$g(0)=0$$

Stąd:

$$a(0-2)^2-2=0$$
$$4a=2$$
$$a=\frac{1}{2}$$

Zapisujemy wzór funkcji g w postaci kanonicznej:

$$g(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2-2$$

Ponieważ $g(x)=f(x+1)$, więc $f(x)=g(x-1)$.

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x)=g(x-1)=\frac{1}{2}(x-1-2)^2-2=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$$

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci ogólnej:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2-2=\frac{1}{2}(x^2-6x+9)-2=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $k = 41$, $S_k = 2788$.

3 pkt – obliczenie k: $k = 41$
ALBO
– obliczenie sumy S_k: $S_k = 2788$.

2 pkt – obliczenie wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego: $(8,\ 32,\ 128)$
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą k, wynikającego z własności ciągu geometrycznego, np. $32^2 = 8 \cdot (3k + 5)$.

1 pkt – obliczenie wyrazów a_1 oraz a_9: $a_1 = 8$, $a_9 = 32$
ALBO
– wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie związku między wyrazami a_1, a_9, a_k, np. $(a_9)^2 = a_1 \cdot a_k$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozważa ciąg geometryczny $(a_1,\ a_l,\ a_k)$, gdzie l jest liczbą naturalną większą od 2 i różną od 9, oraz rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu (a_n) i obliczamy wyrazy a_1 oraz a_9:

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$$

$$a_9 = 3 \cdot 9 + 5 = 32$$

Zatem iloraz trzywyrazowego ciągu geometrycznego $(8,\ 32,\ a_k)$ jest równy $\frac{32}{8} = 4$.
Stąd:

$$a_k = 32 \cdot 4 = 128$$

Obliczamy k:

$$a_k = 128$$

$$3k + 5 = 128$$

$$3k = 123$$

$$k = 41$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i obliczamy sumę S_{41}:

$$S_{41} = \frac{a_1 + a_{41}}{2} \cdot 41 = \frac{8 + 128}{2} \cdot 41 = 2788$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu (a_n) i zapisujemy:

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$$

$$a_9 = 3 \cdot 9 + 5 = 32$$

$$a_k = 3k + 5$$

Z warunków zadania wynika, że ciąg $(8,\ 32,\ 3k + 5)$ jest geometryczny.
Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy:

$$32^2 = 8 \cdot (3k + 5)$$

$$32 \cdot 4 \cdot 8 = 8 \cdot (3k + 5) \quad /: 8$$

$$128 = 3k + 5$$

$$3k = 123$$

$$k = 41$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i obliczamy sumę S_{41}:

$$S_{41} = \frac{a_1 + a_{41}}{2} \cdot 41 = \frac{8 + 128}{2} \cdot 41 = 2788$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 34. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawne wyniki: $C = (21, 0)$, $P_{ABC} = 148$.

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C **oraz** obliczenie długości odcinka AB:
$C = (21, 0)$ oraz $|AB| = 2\sqrt{37}$
ALBO
– obliczenie współrzędnych punktu C **oraz** obliczenie długości odcinka CM:
$C = (21, 0)$ oraz $|CM| = 4\sqrt{37}$,
ALBO
– obliczenie współrzędnych punktu C **oraz** zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od x_C, np. $C = (21, 0)$ oraz $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(0+2) - (10+2)(x_C+4)|$,
ALBO
– obliczenie współrzędnych punktu C **oraz** obliczenie pierwszej współrzędnej x_0 punktu przecięcia prostej AB z osią Ox: $C = (21, 0)$ oraz $x_0 = -\frac{11}{3}$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C: $C = (21, 0)$
ALBO
– obliczenie długości odcinka AB: $|AB| = 2\sqrt{37}$ **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej odcinka AB, np.
$y = -\frac{1}{6}(x+3) + 4$
2) zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka C, np.:
$\sqrt{(x_C+4)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{(x_C+2)^2 + (0-10)^2}$
$(-1) \cdot (x_C+3) + (-6) \cdot (-4) = 0$
$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(0+2) - (10+2)(x_C+4)|$

ALBO

– zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od x_C, np.

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(0+2) - (10+2)(x_C+4)|$ **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej odcinka AB, np.
$y = -\frac{1}{6}(x+3) + 4$
2) zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka C, np.:
$\sqrt{(x_C+4)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{(x_C+2)^2 + (0-10)^2}$
$(-1) \cdot (x_C+3) + (-6) \cdot (-4) = 0$
$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(0+2) - (10+2)(x_C+4)|$

2 pkt – wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej odcinka AB, np.

$y = -\frac{1}{6}(x+3) + 4$

ALBO

– zapisanie równania, w którym niewiadomą jest pierwsza współrzędna wierzchołka C, np.:

$\sqrt{(x_C+4)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{(x_C+2)^2 + (0-10)^2}$

$(-1) \cdot (x_C+3) + (-6) \cdot (-4) = 0$

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(0+2) - (10+2)(x_C+4)|$

ALBO

– obliczenie długości boku AB: $|AB| = 2\sqrt{37}$ **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB: $M = (-3, 4)$
2) wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = 6$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $6x - y + 22 = 0$)
3) zapisanie $C = (x_C, 0)$, gdzie x_C jest niewiadomą
4) zapisanie równości $|AC| = |BC|$ w zależności od współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$, np. $\sqrt{(x_C+4)^2 + (y_C+2)^2} = \sqrt{(x_C+2)^2 + (y_C-10)^2}$

ALBO

– zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$, np.: $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(y_C+2) - (10+2)(x_C+4)|$ **oraz** spełnienie jednego z poniższych warunków:

1) zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB: $M = (-3, 4)$
2) wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = 6$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $6x - y + 22 = 0$)
3) zapisanie $C = (x_C, 0)$, gdzie x_C jest niewiadomą

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

4) zapisanie równości $|AC| = |BC|$ w zależności od współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$, np. $\sqrt{(x_C+4)^2+(y_C+2)^2} = \sqrt{(x_C+2)^2+(y_C-10)^2}$

1 pkt – obliczenie długości boku AB: $|AB| = 2\sqrt{37}$

ALBO

– zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$, np. $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(y_C+2) - (10+2)(x_C+4)|$,

ALBO

– zapisanie współrzędnych środka M odcinka AB: $M = (-3, 4)$,

ALBO

– wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej AB: $a_{AB} = 6$ (lub zapisanie równania prostej AB w postaci ogólnej: $6x - y + 22 = 0$),

ALBO

– zapisanie $C = (x_C, 0)$, gdzie x_C jest niewiadomą,

ALBO

– zapisanie równości $|AC| = |BC|$ w zależności od współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$, np. $\sqrt{(x_C+4)^2+(y_C+2)^2} = \sqrt{(x_C+2)^2+(y_C-10)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa punkt C leżący na osi Ox i w rozwiązaniu popełnia tylko błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.

2. Jeżeli zdający rysuje w układzie współrzędnych symetralną odcinka AB i odczytuje współrzędne punktu C, i zapisuje $C = (21, 0)$ oraz sprawdzi rachunkowo, że $|AC| = |BC|$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty** (jeżeli tego sprawdzenia nie wykona, to otrzymuje za tę część rozwiązania **2 punkty**, a gdy odczyta błędne współrzędne punktu C, to otrzymuje **0 punktów**).

3. Jeżeli zdający nie sporządzi rysunku i zapisze tylko $C = (21, 0)$, to otrzymuje **0 punktów**; jeżeli zdający nie sporządzi rysunku, lecz zapisze $C = (21, 0)$ i kontynuuje rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

4. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współczynnik kierunkowy prostej,
b) zastosowanie niepoprawnego związku między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych,
c) zastosowanie niepoprawnego wzoru na współrzędne środka odcinka,
d) zastosowanie niepoprawnego warunku prostopadłości wektorów,
e) zastosowanie niepoprawnego wzoru na odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych,
f) zastosowanie niepoprawnych własności symetralnej,
g) przyjęcie, że wierzchołek C leży poza osią Ox,

i rozwiązanie zostanie doprowadzone konsekwentnie do końca, to zdający może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Jeżeli zdający popełni więcej niż jeden z wymienionych błędów a)–g), to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

5. Jeżeli zdający rozważa dwa różne położenia punktu C na osi Ox i nie odrzuca niewłaściwego rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej AB:

$$a_{AB} = \frac{10+2}{-2+4} = 6$$

Zatem współczynnik kierunkowy a_k symetralnej k odcinka AB jest równy:

$$a_k = -\frac{1}{6}$$

Symetralna k przechodzi przez środek M odcinka AB. Obliczamy współrzędne punktu M:

$$M = \left(\frac{-4-2}{2}, \frac{-2+10}{2}\right) = (-3, 4)$$

Zatem prosta k ma równanie postaci:

$$y = -\frac{1}{6}(x+3) + 4$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{2}$$

Punkt C jest punktem przecięcia symetralnej k z osią Ox, więc współrzędne punktu $C = (x_C, y_C)$ spełniają równania:

$$y_C = -\frac{1}{6}x_C + \frac{7}{2} \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$0 = -\frac{1}{6}x_C + \frac{7}{2} \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

$$x_C = 21 \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

Zatem $C = (21, 0)$.

Obliczamy długość podstawy AB trójkąta ABC:

$$|AB| = \sqrt{(-2+4)^2 + (10+2)^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Obliczamy wysokość h trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C:

$$h = |CM| = \sqrt{(-3-21)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-24)^2 + 4^2} = \sqrt{576+16} = \sqrt{592} = 4\sqrt{37}$$

Obliczamy pole trójkąta ABC:

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot 4\sqrt{37} = 4 \cdot 37 = 148$$

Sposób II

Ponieważ wierzchołek C leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $C = (x_C, 0)$.

Ponieważ $|AC| = |BC|$, to $|AC|^2 = |BC|^2$. Stąd i ze wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymujemy równanie:

$$(x_C + 4)^2 + (0 + 2)^2 = (x_C + 2)^2 + (0 - 10)^2$$

$$x_C^2 + 8x_C + 16 + 4 = x_C^2 + 4x_C + 4 + 100$$

$$4x_C = 84$$

$$x_C = 21$$

Zatem $C = (21, 0)$.

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta o danych współrzędnych trzech wierzchołków i obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2 + 4)(0 + 2) - (10 + 2)(21 + 4)| = \frac{1}{2} \cdot |4 - 300| = \frac{1}{2} \cdot 296 = 148$$

Sposób III

Ponieważ wierzchołek C leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $C = (x_C, 0)$.

Obliczamy współrzędne środka M odcinka AB:

$$M = \left(\frac{-4 - 2}{2}, \frac{-2 + 10}{2}\right) = (-3, 4)$$

Obliczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{MC}$:

$$\overrightarrow{MA} = [-4 + 3, -2 - 4] = [-1, -6]$$

$$\overrightarrow{MC} = [x_C + 3, 0 - 4] = [x_C + 3, -4]$$

Wektor $\overrightarrow{MA}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{MC}$, zatem:

$$(-1) \cdot (x_C + 3) + (-6) \cdot (-4) = 0$$

$$-x_C - 3 + 24 = 0$$

$$x_C = 21$$

Zatem $C = (21, 0)$.

Obliczamy długość podstawy AB trójkąta ABC:

$$|AB| = \sqrt{(-2 + 4)^2 + (10 + 2)^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{4 + 144} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Obliczamy wysokość h trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C:

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

$$h = |CM| = \sqrt{(-3-21)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-24)^2 + 4^2} = \sqrt{576+16} = \sqrt{592} = 4\sqrt{37}$$

Obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot 4\sqrt{37} = 4 \cdot 37 = 148$$

Sposób IV

Obliczamy długość podstawy AB trójkąta ABC:

$$|AB| = \sqrt{(-2+4)^2 + (10+2)^2} = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{4+144} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$$

Obliczamy współrzędne środka M podstawy AB trójkąta ABC:

$$M = \left(\frac{-4-2}{2}, \frac{-2+10}{2}\right) = (-3, 4)$$

Ponieważ wierzchołek C leży na osi Ox, więc jego współrzędne są równe $C = (x_C, 0)$.

Zapisujemy wysokość h trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C w zależności od x_C:

$$h = |CM| = \sqrt{(-3-x_C)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 9 + 16} = \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25}$$

Zapisujemy pole trójkąta ABC w zależności od x_C:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{37} \cdot \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25} = \sqrt{37} \cdot \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25}$$

Pole trójkąta ABC możemy też wyrazić w zależności od x_C, korzystając ze wzoru na pole trójkąta o danych współrzędnych trzech wierzchołków:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(-2+4)(0+2) - (10+2)(x_C+4)| = \frac{1}{2} \cdot |4 - 12x_C - 48| = 2 \cdot |3x_C + 11|$$

Po przyrównaniu otrzymanych wzorów na pole trójkąta ABC dostajemy:

$$\sqrt{37} \cdot \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 25} = 2 \cdot |3x_C + 11|$$

Obie strony uzyskanego równania są dodatnie. Podnosimy obie strony równania do kwadratu i przekształcamy równanie do równania kwadratowego:

$$37 \cdot (x_C^2 + 6x_C + 25) = 4 \cdot (3x_C + 11)^2$$

$$37 \cdot (x_C^2 + 6x_C + 25) = 4 \cdot (9x_C^2 + 66x_C + 121)$$

$$37x_C^2 + 222x_C + 925 = 36x_C^2 + 264x_C + 484$$

$$x_C^2 - 42x_C + 441 = 0$$

$$(x_C - 21)^2 = 0$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

$$x_C = 21$$

Zatem $C = (21, 0)$.

Obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = 2 \cdot |3x_C + 11| = 2 \cdot |3 \cdot 21 + 11| = 148$$

<u>*Sposób V*</u>
Wyznaczamy równanie prostej AB:

$$(y + 2)(-2 + 4) - (10 + 2)(x + 4) = 0$$

$$2y + 4 - 12x - 48 = 0$$

$$y = 6x + 22$$

Zatem współczynnik kierunkowy a_k symetralnej k odcinka AB jest równy:

$$a_k = -\frac{1}{6}$$

Symetralna k przechodzi przez środek M odcinka AB. Obliczamy współrzędne punktu M:

$$M = \left(\frac{-4 - 2}{2}, \frac{-2 + 10}{2}\right) = (-3, 4)$$

Zatem prosta k ma równanie postaci:

$$y = -\frac{1}{6}(x + 3) + 4$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{2}$$

Punkt C jest punktem przecięcia symetralnej k z osią Ox, więc współrzędne punktu $C = (x_C, y_C)$ spełniają równania:

$$y_C = -\frac{1}{6}x_C + \frac{7}{2} \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$0 = -\frac{1}{6}x_C + \frac{7}{2} \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

$$x_C = 21 \quad \text{oraz} \quad y_C = 0$$

Zatem $C = (21, 0)$.

Oznaczmy przez D punkt przecięcia prostej AB z osią Ox. Współrzędne punktu $D = (x_D, y_D)$ spełniają równania:

$$y_D = 6x_D + 22 \quad \text{oraz} \quad y_D = 0$$

Stąd otrzymujemy:

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

$$0 = 6x_D + 22 \quad \text{oraz} \quad y_D = 0$$

$$x_D = -\frac{11}{3} \quad \text{oraz} \quad y_D = 0$$

Zatem $D = \left(-\frac{11}{3}, 0\right)$.

Obliczamy długość odcinka CD:

$$|CD| = \left|21 - \left(-\frac{11}{3}\right)\right| = \frac{74}{3}$$

Rozważmy trójkąty ACD oraz DCB.
Wysokość trójkąta ACD poprowadzona z wierzchołka A na podstawę CD jest równa 2.
Obliczamy pole trójkąta ACD:

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot 2 = |CD| = \frac{74}{3}$$

Wysokość trójkąta DCB poprowadzona z wierzchołka B na podstawę CD jest równa 10.
Obliczamy pole trójkąta DCB:

$$P_{DCB} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot 10 = 5 \cdot |CD| = 5 \cdot \frac{74}{3} = \frac{370}{3}$$

Obliczamy pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = P_{ACD} + P_{DCB} = \frac{74}{3} + \frac{370}{3} = \frac{444}{3} = 148$$

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują **Zasady oceniania** stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

a) **ogólnych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

b) dodatkowych **szczegółowych zasad oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2026.

I. **Ogólne zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek wynikających z:
   - błędnego przepisania
   - przestawienia cyfr
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie
   - przestawienia położenia przecinka
   - przestawienia położenia znaku liczby.

2. W przypadku błędów wynikających ze zmiany znaku liczby należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.

3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.

4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.

5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.

6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.

7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.

8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych, lub zapisze zależności pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe **szczegółowe zasady oceniania** zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26.

1 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $3x^2 - 2x - 8$, tzn. zastosowanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i obliczenie tych pierwiastków,

ALBO

– konsekwentne (do otrzymanego w wyniku popełnienia błędów o charakterze dyskalkulicznym ujemnego lub równego zero wyróżnika) narysowanie paraboli,

ALBO

– poprawne rozwiązanie nierówności $3x^2 + 4x \geq 0$ (tzn. stosuje się punkt 6. ogólnych zasad oceniania),

ALBO

– konsekwentne (do wyznaczonych przez siebie pierwiastków oraz do rozpatrywanego trójmianu i nierówności) wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności.

Uwagi:

1. Nie stosuje się uwag 3., 4. i 5. z zasad oceniania arkusza standardowego.
2. Akceptowane jest zapisanie pierwiastków trójmianu w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi.

Zadanie 27.

1 pkt – przekształcenie nierówności $a(a-b) \geq b(a-3b)$ do postaci $a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 28.

1 pkt – zapisanie równania $0{,}75 \cdot (35x + 25y) = 4665$

ALBO

– obliczenie przychodu organizatorów przedstawienia: 6220 zł.

Zadanie 29.

Stosuje się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 30.

1 pkt – zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznej lub związków miarowych w trójkącie o kątach $30°$, $60°$, $90°$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością ostrosłupa), np.: $\frac{H}{4\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30°$, $\frac{H}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 4\sqrt{6}$.

Zadanie 31.

1 pkt – zapisanie jedynie liczby 25 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych).

Uwagi:

1. W ocenie rozwiązania tego zadania (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi ze standardowych zasad oceniania.
2. Jeżeli zdający poprawnie wypisze/zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, lecz popełni błąd w ich zliczeniu (np. $|A| = 8$) i konsekwentnie zapisze wynik (np. $\frac{8}{25}$), to otrzymuje **2 punkty**.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl

Zadanie 32.

2 pkt – zapisanie miejsc zerowych funkcji f: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$,

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = a(x-2)^2 - 2$,

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x) = ax(x-4)$,

ALBO

– zapisanie, że wierzchołkiem wykresu funkcji g jest punkt o współrzędnych $(2, -2)$, **oraz** zapisanie, że drugim miejscem zerowym funkcji g jest liczba 4.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x-p)^2 + q$ **oraz** zapisanie $p = 3$ oraz $q = -2$

ALBO

– zapisanie jednego z równań:

- $\frac{-b}{2a} = 3$
- $\frac{-\Delta}{4a} = -2$
- $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -2$
- $a + b + c = 0$

Zadanie 33.

2 pkt – obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego (a_1, a_9, a_k): $q = 4$.

ALBO

– obliczenie wyrazów a_1 oraz a_9: $a_1 = 8$, $a_9 = 32$, **oraz** wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie związku między wyrazami a_1, a_9, a_k, np. $(a_9)^2 = a_1 \cdot a_k$.

1 pkt – obliczenie wyrazu a_1: $a_1 = 8$

ALBO

– obliczenie wyrazu a_9: $a_9 = 32$.

Zadanie 34.

1 pkt – zapisanie drugiej współrzędnej punktu C, np. $y_C = 0$.

Więcej arkuszy znajdziesz na stronie: maturapodklucz.pl