

|                                   |                                                                                                                 |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Rodzaj dokumentu:</i>          | <b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>                                                                         |
| <i>Egzamin:</i>                   | <b>Egzamin maturalny</b>                                                                                        |
| <i>Przedmiot:</i>                 | <b>Matematyka</b>                                                                                               |
| <i>Poziom:</i>                    | <b>Poziom rozszerzony</b>                                                                                       |
| <i>Formy arkusza:</i>             | MMAP-R0-100, MMAP-R0-200,<br>MMAP-R0-300, MMAP-R0-400,<br>MMAP-R0-660, MMAP-R0-700,<br>MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00 |
| <i>Termin egzaminu:</i>           | 11 maja 2026 r.                                                                                                 |
| <i>Data publikacji dokumentu:</i> | 26 czerwca 2026 r.                                                                                              |

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 1. (0–2)

| Wymagania określone w podstawie programowej <sup>1</sup>                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                                                                                                                      | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                             |
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>XI.R2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności [...].<br>VI.R1) oblicza granice ciągów, korzystając z [...] twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych [...]. |

### Zasady oceniania

- 2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{1}{3}$ .
- 1 pkt – zapisanie wyrażenia  $\binom{n+2}{n-1}$  w postaci  $\frac{(n-1)! n(n+1)(n+2)}{[n+2-(n-1)]!(n-1)!}$  lub w postaci  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwaga:

Jeżeli zdający zapisze symbol Newtona  $\binom{n+2}{n-1}$  błędnie jako  $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  lub  $n(n+1)(n+2)$ , lub popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma iloraz wielomianów stopnia trzeciego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy granicę, to otrzymuje **1 punkt**.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na symbol Newtona i otrzymujemy

$$\binom{n+2}{n-1} = \frac{(n-1)! n(n+1)(n+2)}{3!(n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ .

Obliczamy granicę ciągu

<sup>1</sup>Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{6n^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

**Zadanie 2. (0–3)**

| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                  | Wymaganie szczegółowe                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym. |

**Zasady oceniania**

- 3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\frac{1}{28}$ .
- 2 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych **oraz** wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , np.  
 $|\Omega| = 8!$  oraz  $|A| = 2 \cdot 6!$ .
- 1 pkt – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych, np.  $|\Omega| = 8!$   
 $ALBO$   
– zapisanie, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu  $A$ , musi być liczba podzielna przez 3,  
 $ALBO$   
– wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ , np.  $|A| = 2 \cdot 6!$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

- Jeżeli zdający zapisze, że trzecim i szóstym wyrazem ciągu, który jest zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu  $A$ , musi być liczba podzielna przez 3, ale – obliczając liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$  – zapisze  $|A| = 6!$  (lub  $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 6!$ ) oraz rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać **2 punkty**.
- Jeżeli zdający zapisze  $|\Omega| = \binom{8}{2}$  (lub  $|\Omega| = 8 \cdot 7$ ) bez stosownego komentarza i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punktów**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Jest to model klasyczny. Niech  $\Omega$  oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych. Wówczas  $|\Omega| = 8!$ .

Iloczyn trzech liczb całkowitych jest podzielny przez 3, gdy co najmniej jedna z tych liczb jest podzielna przez 3. Wobec tego, aby iloczyn trzech kolejnych wyrazów ciągu był liczbą podzielną przez 3, to jeden z tych trzech wyrazów musi być liczbą podzielną przez 3.

W zbiorze  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  są dokładnie dwie liczby podzielne przez 3: 3 oraz 6.

Niech ciąg  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$  będzie zdarzeniem elementarnym, które sprzyja zdarzeniu  $A$ . W tym ciągu liczbowym znajdują się dokładnie dwie liczby podzielne przez 3: 3 oraz 6. Zatem jedna z tych liczb znajduje się wśród wyrazów  $a_1, a_2, a_3$  (gdyż iloczyn  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$  jest podzielny przez 3), a druga z nich znajduje się wśród wyrazów  $a_6, a_7, a_8$  (gdyż iloczyn  $a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$  jest podzielny przez 3), więc wyrazy  $a_4$  oraz  $a_5$  nie są podzielne przez 3. Stąd i z tego, że iloczyny  $a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$  oraz  $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$  są podzielne przez 3, wynika, że wyrazy  $a_3$  oraz  $a_6$  muszą być podzielne przez 3, tj.

$$\{a_3, a_6\} = \{3, 6\}.$$

Jeżeli zdarzenie elementarne jest ciągiem, w którym trzecim i szóstym wyrazem są liczby 3 oraz 6, to iloczyn każdych trzech kolejnych wyrazów takiego ciągu jest liczbą podzielną przez 3. Zatem takie zdarzenie elementarne sprzyja zdarzeniu  $A$ .

Dlatego zdarzeniu  $A$  sprzyjają jedynie zdarzenia elementarne będące ciągami, których trzecim oraz szóstym wyrazem są liczby 3 oraz 6. Liczba wszystkich takich ciągów jest równa  $|A| = 2 \cdot 6!$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{28}$$

### Zadanie 3. (0–3)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                     | Wymaganie szczegółowe                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający:<br>II.R5) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$ [...]. |

### Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj.:

- przekształcenie nierówności  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  do postaci  $(x - y)^2 \geq 0$  (lub do

postaci  $\frac{(x-y)^2}{x^2 y^2} \geq 0$ ) i zapisanie, że kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny  
ALBO

- przekształcenie nierówności  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  do postaci  $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$

(lub do postaci  $\frac{(x + y)(x - y)^2}{x^2 y^2} \geq 0$ ) **oraz** uzasadnienie, że dla liczb dodatnich

$x, y$  nierówność  $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$  (lub nierówność  $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$ )

jest prawdziwa,

ALBO

- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $f$  oraz uzasadnienie, że funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą dla  $x = y$  i obliczenie  $f(y)$ .

2 pkt – przekształcenie nierówności  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  do postaci  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$  (lub do postaci  $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2y^2} \geq 0$ )

ALBO

– przekształcenie nierówności  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  do postaci  $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$  (lub do postaci  $\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2} \geq 0$ ),

ALBO

– obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $f$ :  $x = y$ .

1 pkt – przekształcenie nierówności do postaci  $W(x, y) \geq 0$  (lub do postaci  $\frac{W(x, y)}{x^2y^2} \geq 0$ ), gdzie  $W$  jest wielomianem zmiennych  $x$  oraz  $y$ , np.:

$$x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y \geq 0, \quad x^3 + y^3 - xy(x+y) \geq 0, \quad \frac{x^3 + y^3 - xy^2 - x^2y}{x^2y^2} \geq 0$$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci  $\frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2y^2} \geq \frac{x+y}{xy}$ ,

ALBO

– rozważenie funkcji  $f(x) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  zmiennej dodatniej  $x$  z parametrem

$$y > 0 \text{ oraz wyznaczenie pochodnej tej funkcji, np. } f'(x) = \frac{1}{y^2} - \frac{2y}{x^3} + \frac{1}{x^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości  $x$  i  $y$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przekształci nierówność do postaci  $(x^2 - y^2)(x - y) \geq 0$ , a następnie uzasadni prawdziwość tej nierówności w przypadku, gdy  $x > y$  oraz w przypadku, gdy  $x < y$ , a pominie przypadek  $x = y$ , to otrzymuje **2 punkty**.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

##### Sposób I (suma sześciątów)

Z założenia  $x > 0$  oraz  $y > 0$ , więc  $x^2y^2 > 0$ . Mnożymy obie strony nierówności

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \text{ przez } x^2y^2 \text{ i otrzymujemy}$$

$$xy^2 + yx^2 \leq x^3 + y^3$$

Stosujemy wzór na sumę sześcianów oraz kwadrat różnicy i dostajemy:

$$xy(x+y) \leq (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$0 \leq (x+y)(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$0 \leq (x+y)(x-y)^2$$

Ponieważ  $(x+y)$  jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich  $x$  oraz  $y$ , a ponadto  $(x-y)^2$  jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej  $(x-y)$ , więc  $(x+y)(x-y)^2$  jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność

$0 \leq (x+y)(x-y)^2$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $x$  i dla każdej liczby dodatniej  $y$ . To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej  $x$  i każdej liczby dodatniej  $y$  nierówność  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

### Sposób II (grupowanie)

Z założenia  $x > 0$  oraz  $y > 0$ , więc  $x^2y^2 > 0$ . Mnożymy obie strony nierówności

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  przez  $x^2y^2$  oraz stosujemy wzór na różnicę kwadratów i otrzymujemy kolejno:

$$xy^2 + yx^2 \leq x^3 + y^3$$

$$0 \leq x^3 - xy^2 + y^3 - yx^2$$

$$0 \leq x(x^2 - y^2) + y(y^2 - x^2)$$

$$0 \leq (x-y)(x^2 - y^2)$$

$$0 \leq (x-y)^2(x+y)$$

Ponieważ  $(x+y)$  jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich  $x$  oraz  $y$ , a ponadto  $(x-y)^2$  jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej  $(x-y)$ , więc  $(x+y)(x-y)^2$  jest nieujemne jako iloczyn liczby dodatniej i nieujemnej. Zatem nierówność

$0 \leq (x+y)(x-y)^2$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $x$  i dla każdej liczby dodatniej  $y$ . To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej  $x$  i każdej liczby dodatniej  $y$  nierówność  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

### Sposób III

Z założenia wynika, że  $x \neq 0$  i  $y \neq 0$ , więc przekształcamy równoważnie nierówność

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ , rozszerzając odpowiednie ułamki i stosując wzór na różnicę kwadratów:

$$0 \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$0 \leq \frac{x^3}{x^2y^2} + \frac{y^3}{x^2y^2} - \frac{y^2x}{x^2y^2} - \frac{x^2y}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{x^3 + y^3 - y^2x - x^2y}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{x(x^2 - y^2) + y(y^2 - x^2)}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{(x - y)(x^2 - y^2)}{x^2y^2}$$

$$0 \leq \frac{(x - y)^2(x + y)}{x^2y^2}$$

Ponieważ:

- $(x + y)$  jest dodatnie jako suma dwóch liczb dodatnich  $x$  oraz  $y$
- $(x - y)^2$  jest nieujemne jako kwadrat liczby rzeczywistej  $(x - y)$
- $x^2y^2$  jest dodatnie jako iloczyn kwadratów liczb dodatnich  $x$  oraz  $y$ ,

więc  $\frac{(x - y)^2(x + y)}{x^2y^2}$  jest nieujemne jako iloraz liczby nieujemnej  $(x - y)^2(x + y)$  i liczby

dodatniej  $x^2y^2$ . Zatem nierówność  $0 \leq \frac{(x - y)^2(x + y)}{x^2y^2}$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $x$  i dla każdej liczby dodatniej  $y$ . To oznacza, że dla każdej liczby dodatniej  $x$  i każdej liczby dodatniej  $y$  nierówność  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$  jest również prawdziwa.

To należało wykazać.

#### Sposób IV (badanie funkcji)

Rozważmy funkcję  $f(x) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$  zmiennej dodatniej  $x$  z parametrem  $y > 0$ .

Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1}{y^2} - \frac{2y}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 2y^3 + xy^2}{x^3y^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - y^3 + xy^2 - y^3}{x^3y^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2) + y^2(x - y)}{x^3y^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - y)(x^2 + xy + 2y^2)}{x^3y^2}$$

Ponieważ  $x > 0$  oraz  $y > 0$ , więc  $x^2 + xy + 2y^2 > 0$  i  $x^3y^2 > 0$ . Zatem:

- $f'(x) = 0$  tylko dla  $x = y$
- $f'(x) > 0$  w przedziale  $(y, +\infty)$
- $f'(x) < 0$  w przedziale  $(0, y)$ .

Stąd funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(0, y]$  i jest rosnąca w przedziale  $[y, +\infty)$ .

Zatem funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą dla  $x = y$ . Ponieważ

$$f(y) = \frac{y}{y^2} + \frac{y}{y^2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = 0, \text{ więc}$$

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 0$$

czyli

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$$

dla każdej liczby dodatniej  $x$  i dla każdej liczby dodatniej  $y$ .

To należało wykazać.

#### Zadanie 4. (0–3)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                                     | Wymagania szczegółowe                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Zdający:<br>VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;<br>VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne. |

#### Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – uzasadnienie, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe (lub  $AL$  i  $KM$  są równoległe) i przedstawienie kompletnego rozumowania prowadzącego do wyznaczenia poprawnego równania z niewiadomą  $|PQ|$  oraz zapisanie tego równania  
 $ALBO$

– przyjęcie bez uzasadnienia, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe (lub  $AL$  i  $KM$  są równoległe) **oraz** przeprowadzenie pełnego rozumowania przy tym założeniu

i otrzymanie tezy  $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$ ,

$ALBO$

– obliczenie współrzędnych punktu  $Q$ :  $Q = \left(\frac{4}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$ .

1 pkt – uzasadnienie, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe (lub  $AL$  i  $KM$  są równoległe)  
 $ALBO$

– obliczenie długości boku  $KM$  trójkąta  $DKM$  i długości jednego z pozostałych

dwóch boków tego trójkąta:  $|KM| = \frac{\sqrt{5}}{4}a$ ,  $|DK| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ ,  $|DM| = \frac{5}{4}a$ ,

ALBO

– obliczenie długości jednego z odcinków  $AP$ ,  $DP$  lub  $PK$ :  $|AP| = \frac{1}{\sqrt{5}}a$ ,

$|DP| = \frac{2}{\sqrt{5}}a$ ,  $|PK| = \frac{1}{2\sqrt{5}}a$ ,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu  $P$ :  $P = \left(\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a\right)$ ,

ALBO

– uzasadnienie, że trójkąty  $EKD$  i  $MKD$  są przystające.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwagi:

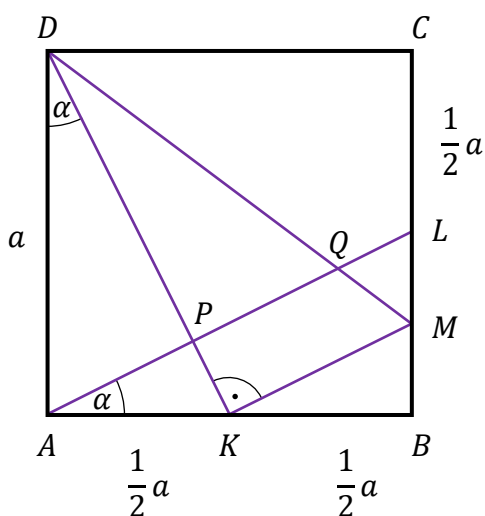
1. Jeżeli zdający przyjmie błędne założenie (np. że miara kąta  $AKD$  jest równa  $60^\circ$ ) i na tym opiera swoje rozumowanie, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający uzasadni, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe (lub  $AL$  i  $KM$  są równoległe), a w dalszej części rozwiązania popelni tylko jeden błąd rachunkowy, ale zrealizuje w pełni strategię rozwiązania zadania, otrzymując równanie z jedną niewiadomą  $|PQ|$ , to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Oznaczmy miarę kąta  $ADK$  przez  $\alpha$ . Wtedy  $|\angle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .

Ponieważ  $|DA| = |AB| = a$ ,  $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$  i kąty  $DAK$  oraz  $ABL$  są proste, więc trójkąty  $DAK$  i  $ABL$  są przystające (cecha bkb). Zatem  $|\angle BAL| = |\angle ADK| = \alpha$  oraz  $|\angle ALB| = |\angle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .



Stąd wynika, że miary kątów ostrych trójkąta  $APK$  są równe miarom odpowiednich kątów ostrych trójkątów  $DAK$  i  $ABL$ . To oznacza, że trójkąt  $APK$  jest prostokątny i podobny do trójkątów  $DAK$  oraz  $DPA$ , więc

$$\frac{|AD|}{|AK|} = \frac{|AP|}{|PK|} = \frac{|DP|}{|AP|} = 2$$

Stąd  $|DP| = 2 \cdot |AP| = 2 \cdot (2 \cdot |PK|) = 4 \cdot |PK|$ .

Kąt  $DKM$  jest prosty i  $|\angle KDM| = |\angle PDQ|$ , więc trójkąty prostokątne  $DKM$  oraz  $DPQ$  są podobne, a skala podobieństwa jest równa

$$\frac{|DK|}{|DP|} = \frac{|DP| + |PK|}{|DP|} = \frac{5 \cdot |PK|}{4 \cdot |PK|} = \frac{5}{4}$$

Zatem  $|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM|$ , a ponieważ trójkąt  $KBM$  jest podobny do trójkąta  $ABL$  w skali  $1 : 2$ , więc

$$|KM| = \frac{1}{2} \cdot |AL| = \frac{1}{2} \cdot |DK| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4} a$$

i tym samym

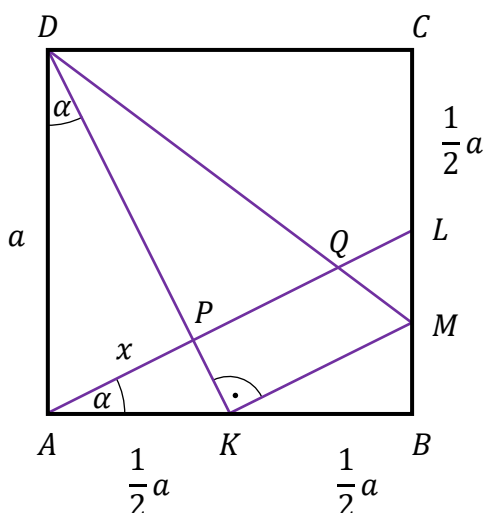
$$|PQ| = \frac{4}{5} \cdot |KM| = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} a = \frac{\sqrt{5}}{5} a$$

To należało wykazać.

### Sposób II

Niech  $x = |AP|$  oraz  $\alpha = |\angle ADK|$ . Wtedy  $|\angle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .

Ponieważ  $|DA| = |AB| = a$ ,  $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$  i kąty  $DAK$  oraz  $ABL$  są proste, więc trójkąty  $DAK$  i  $ABL$  są przystające (cecha bkb). Zatem  $|\angle BAL| = |\angle ADK| = \alpha$  oraz  $|\angle ALB| = |\angle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .



Kąty  $DAP$  oraz  $ALB$  są naprzemianległe i  $AD \parallel BC$ , więc  $|\angle DAP| = |\angle ALB| = 90^\circ - \alpha$ .

Zatem trójkąt  $DPA$  jest prostokątny i podobny do trójkąta  $DAK$ . Stąd  $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$ , czyli  $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $DAP$  otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt  $DPA$  jest prosty, więc  $AL \parallel KM$ . Zatem trójkąty prostokątne  $DKM$  i  $DPQ$  oraz  $ADK$  i  $BKM$  są podobne. Skala podobieństwa trójkątów  $ADK$  i  $BKM$  jest równa  $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$ , więc  $|DK| = 2 \cdot |KM|$ . Stąd z kolei wynika, że trójkąt  $DKM$  jest podobny do trójkąta  $DAK$ , więc jest również podobny do trójkąta  $DPA$ . Zatem  $|\angle KDM| = |\angle ADP| = \alpha$ . Wobec tego trójkąty prostokątne  $DPA$  i  $DPQ$  są przystające (cecha kbk). Stąd

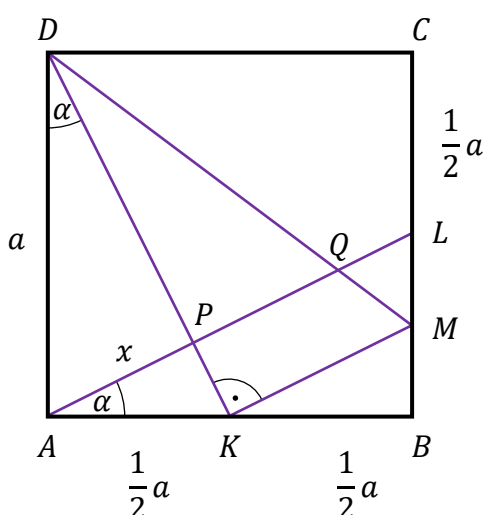
$$|PQ| = |AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

### Sposób III

Niech  $x = |AP|$  oraz  $\alpha = |\angle ADK|$ . Wtedy  $|\angle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .

Ponieważ  $|DA| = |AB| = a$ ,  $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$  i kąty  $DAK$  oraz  $ABL$  są proste, więc trójkąty  $DAK$  i  $ABL$  są przystające (cecha bkb). Zatem  $|\angle BAL| = |\angle ADK| = \alpha$  oraz  $|\angle ALB| = |\angle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .



Kąty  $DAP$  oraz  $ALB$  są naprzemianległe i  $AD \parallel BC$ , więc  $|\angle DAP| = |\angle ALB| = 90^\circ - \alpha$ .

Zatem trójkąt  $DPA$  jest prostokątny i podobny do trójkąta  $DAK$ . Stąd  $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$ , czyli  $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $DAP$  otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Ponieważ kąt  $DPA$  jest prosty, więc  $AL \parallel KM$ . To oznacza, że  $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle BAL|$ , więc trójkąty prostokątne  $ADK$  i  $BKM$  są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa  $\frac{|AD|}{|BK|} = 2$ . Stąd  $|MB| = \frac{1}{2} \cdot |AK| = \frac{1}{4}a$  oraz  $|LM| = |BL| - |MB| = \frac{1}{4}a$ .

Ponieważ  $AD \parallel BC$ , więc kąty naprzemianległe  $ADQ$  i  $QML$  mają równe miary. Z tej samej przyczyny kąty naprzemianległe  $QAD$  i  $QLM$  mają równe miary. Zatem trójkąty  $AQD$  i  $LQM$  są podobne, a skala ich podobieństwa jest równa  $\frac{|AD|}{|LM|} = \frac{a}{\frac{1}{4}a} = 4$ . Stąd

$$|LQ| = \frac{1}{4} \cdot (|AP| + |PQ|) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sqrt{5}}{5}a + |PQ| \right)$$

Ale  $|LQ| + |AP| + |PQ| = |AL| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ , więc

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\sqrt{5}}{5}a + |PQ| \right) + \frac{\sqrt{5}}{5}a + |PQ| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}a + \frac{5}{4} \cdot |PQ| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

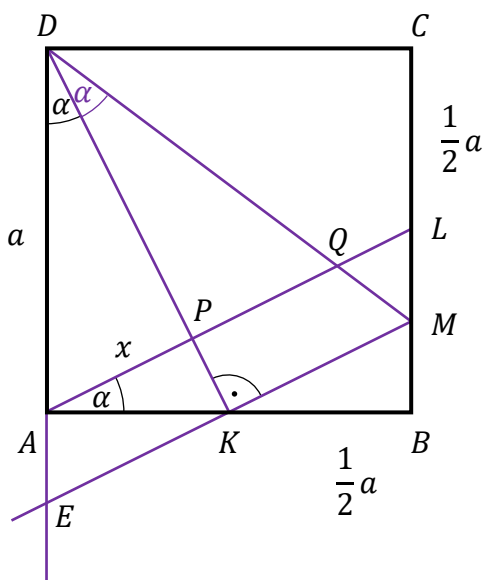
To należało wykazać.

#### Sposób IV

Oznaczmy przez  $E$  punkt przecięcia prostych  $AD$  i  $KM$ . Niech  $x = |AP|$  oraz  $\alpha = |\sphericalangle ADK|$ . Wtedy  $|\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .

Ponieważ  $|AK| = |BK| = \frac{a}{2}$  i kąty  $KAE$  oraz  $KBM$  są proste, a kąty  $AKE$  i  $BKM$  mają równe miary (gdyż są to kąty wierzchołkowe), więc trójkąty  $AKE$  i  $BKM$  są przystające (cecha kbk). Stąd mamy  $|EK| = |KM|$ , więc trójkąty prostokątne  $DKE$  i  $DKM$  są przystające (cecha bkb). Wobec tego  $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle KDE| = \alpha$ .

Ponieważ  $|DA| = |AB| = a$ ,  $|AK| = |BL| = \frac{a}{2}$  i kąty  $DAK$  oraz  $ABL$  są proste, więc trójkąty  $DAK$  i  $ABL$  są przystające. Zatem  $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle ADK| = \alpha$  oraz  $|\sphericalangle ALB| = |\sphericalangle DKA| = 90^\circ - \alpha$ .



Kąty  $DAP$  oraz  $ALB$  są naprzemianległe i  $AD \parallel BC$ , więc  $|\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle ALB| = 90^\circ - \alpha$ , czyli kąt  $DPA$  jest prosty. Stąd  $EM \parallel AL$ , co oznacza, że trójkąty  $APD$  i  $QPD$  są przystające (cecha kbk) i wobec tego  $|PQ| = |AP| = x$ .

Trójkąty  $DPA$  i  $DAK$  mają kąty o miarach  $\alpha$ ,  $90^\circ - \alpha$  i  $90^\circ$ , więc są podobne (cecha kkk). Dlatego  $\frac{|DP|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AK|}$ , czyli  $|DP| = \frac{|AD|}{|AK|} \cdot |AP| = 2 \cdot |AP| = 2x$ .

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $DAP$  otrzymujemy:

$$|AP|^2 + |DP|^2 = |AD|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = a^2$$

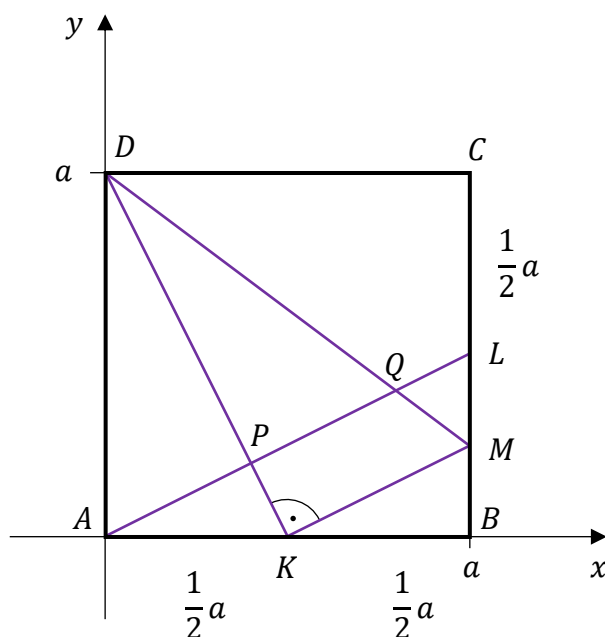
$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5} a$$

To należało wykazać.

### Sposób V (analitycznie)

Umieszczamy kwadrat  $ABCD$  w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  tak, żeby  $A = (0, 0)$ ,  $B = (a, 0)$ ,  $C = (a, a)$ ,  $D = (0, a)$  (zobacz rysunek).



Wówczas  $K = \left(\frac{1}{2}a, 0\right)$  oraz  $L = \left(a, \frac{1}{2}a\right)$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $DK$ :

$$y = \frac{0 - a}{\frac{1}{2}a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -2x + a$$

Wyznaczamy równanie prostej  $AL$ :

$$y = \frac{\frac{1}{2}a - 0}{a - 0} \cdot x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Wyznaczamy współrzędne punktu  $P$ :

$$\frac{1}{2}x = -2x + a$$

$$x = \frac{2}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}a = \frac{1}{5}a$$

Zatem  $P = \left(\frac{2}{5}a, \frac{1}{5}a\right)$ .

Prosta  $KM$  jest prostopadła do prostej  $DK$ , więc współczynnik kierunkowy w równaniu prostej  $KM$  jest równy  $\frac{1}{2}$ . Zatem prosta  $KM$  ma równanie  $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}a\right)$ . Stąd druga współrzędna punktu  $M$  jest równa  $\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a$ , czyli  $M = \left(a, \frac{1}{4}a\right)$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $DM$ :

$$y = \frac{\frac{1}{4}a - a}{a - 0} \cdot (x - 0) + a$$

$$y = -\frac{3}{4}x + a$$

Obliczamy współrzędne punktu  $Q$ , korzystając z równań prostych  $AL$  i  $DM$ :

$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + a$$

$$x = \frac{4}{5}a$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a = \frac{2}{5}a$$

Zatem  $Q = \left(\frac{4}{5}a, \frac{2}{5}a\right)$ .

Obliczamy długość odcinka  $PQ$ :

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}a - \frac{2}{5}a\right)^2 + \left(\frac{2}{5}a - \frac{1}{5}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{25}}a = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

To należało wykazać.

#### Zadanie 5. (0–4)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                                      | Wymaganie szczegółowe                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Zdający:<br>III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną. |

#### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty).$$

3 pkt – zapisanie trzech przedziałów:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 3)$  i  $[3, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych

przedziałów – tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności z rozpatrywanymi przedziałami

ALBO

- rozwiązanie nierówności  $2 - |x + 3| < 0$ ,

ALBO

- zapisanie koniunkcji nierówności  $2 - |x + 3| < 0$  i  $x \neq 3$ ,

ALBO

- przekształcenie nierówności do postaci  $(x - 3)^2(x + 1)(x + 5) > 0$ ,

ALBO

- wyznaczenie wszystkich pierwiastków wielomianu  $x^4 - 22x^2 + 24x + 45$  i określenie krotności tych pierwiastków,

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:  $2x - 6 < |x^2 - 9|$  i  $2x - 6 > -|x^2 - 9|$ , a następnie w postaci równoważnej koniunkcji alternatyw nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$(x^2 - 9 > 2x - 6 \text{ lub } x^2 - 9 < -2x + 6) \text{ i } (x^2 - 9 > -2x + 6 \text{ lub } x^2 - 9 < 2x - 6),$$

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej alternatywy dwóch nierówności:  $x^2 - 9 > |2x - 6|$  lub  $x^2 - 9 < -|2x - 6|$ , a następnie w postaci równoważnej alternatywy koniunkcji nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$(2x - 6 < x^2 - 9 \text{ i } 2x - 6 < -x^2 + 9) \text{ lub } (2x - 6 < -x^2 + 9 \text{ i } 2x - 6 > x^2 - 9),$$

ALBO

- zapisanie czterech przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród trzech następujących przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$  – tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

- zapisanie, że przypadek  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 < 0$  jest sprzeczny **oraz** zapisanie trzech przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych trzech przypadków – tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

- odczytanie z wykresów funkcji  $f(x) = |2x - 6|$  oraz  $g(x) = |x^2 - 9|$  pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia:  $x = -5$  oraz  $x = -1$  oraz  $x = 3$  i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

2 pkt – zapisanie trzech przedziałów:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 3)$  i  $[3, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów

ALBO

- zapisanie nierówności  $|x - 3| \cdot (2 - |x + 3|) < 0$ ,

ALBO

- zapisanie jednej z nierówności:

$$1 < \frac{|x + 3|}{2} \quad (\text{bez zapisania założenia } x \neq 3),$$

$$1 < \frac{|x^2 - 9|}{2 \cdot |x - 3|} \quad \text{z zapisaniem założenia } x \neq 3,$$

$$1 < \frac{|x - 3| \cdot |x + 3|}{|2x - 6|} \quad \text{z zapisaniem założenia } x \neq 3,$$

$$1 < \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{2x - 6} \right| \quad \text{z zapisaniem założenia } x \neq 3,$$

$$(x - 3)^2 \cdot [4 - (x + 3)^2] < 0,$$

ALBO

- przekształcenie nierówności do postaci  $x^4 - 22x^2 + 24x + 45 > 0$  i wyznaczenie dwóch pierwiastków wielomianu  $x^4 - 22x^2 + 24x + 45$  (lub zapisanie, że 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem tego wielomianu),

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:

$$2x - 6 < |x^2 - 9| \quad \text{i} \quad 2x - 6 > -|x^2 - 9|,$$

ALBO

- zapisanie nierówności w postaci równoważnej alternatywy dwóch nierówności:

$$x^2 - 9 > |2x - 6| \quad \text{lub} \quad x^2 - 9 < -|2x - 6|,$$

ALBO

- zapisanie czterech przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,

$$2x - 6 < 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 9 \geq 0, \quad 2x - 6 \geq 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 9 < 0, \quad 2x - 6 \geq 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 9 \geq 0$$

(z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków,

ALBO

- zapisanie trzech przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** zapisanie, że przypadek  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 < 0$  jest sprzeczny,

ALBO

- narysowanie wykresów funkcji  $f(x) = |2x - 6|$  oraz  $g(x) = |x^2 - 9|$ .

- 1 pkt – zapisanie trzech przedziałów:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 3)$  i  $[3, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

ALBO

- zapisanie jednego z przedziałów:  $(-\infty, -3)$ ,  $[-3, 3)$ ,  $[3, +\infty)$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przedziale – tj. wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań zapisanej nierówności z rozpatrywanym przedziałem,

ALBO

- zastosowanie własności wartości bezwzględnej i zapisanie nierówności:

$$2 \cdot |x - 3| - |(x - 3)(x + 3)| < 0,$$

ALBO

- zastosowanie własności wartości bezwzględnej i zapisanie nierówności w jednej z następujących postaci:

$$1 < \frac{|x^2 - 9|}{2 \cdot |x - 3|} \quad (\text{bez zapisania założenia } x \neq 3),$$

$$1 < \frac{|x - 3| \cdot |x + 3|}{|2x - 6|} \quad (\text{bez zapisania założenia } x \neq 3),$$

$$1 < \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{2x - 6} \right| \quad (\text{bez zapisania założenia } x \neq 3),$$

$$(2x - 6)^2 < (x^2 - 9)^2,$$

ALBO

- zapisanie czterech przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  
 $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$   
 (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przypadków bez użycia wartości bezwzględnej,

ALBO

- zapisanie jednego z trzech przypadków:  $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 < 0$ ,  
 $2x - 6 < 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$ ,  $2x - 6 \geq 0$  i  $x^2 - 9 \geq 0$  (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przypadku – tj. wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

1. Jeżeli zdający, zapisując nierówność bez użycia wartości bezwzględnej, popełni błąd, który nie jest rachunkowy, tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków/przedziałów i rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.
2. Jeżeli zdający nie rozpatruje przedziałów, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postacie (lub rozpatruje przypadki wyznaczone jedynie przez nierówności ostre, które nie wyczerpują zbioru  $\mathbb{R}$ ), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań  $(-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$ , ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji  $f(x) = |2x - 6|$  i  $g(x) = |x^2 - 9|$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający, podając zbiór rozwiązań nierówności, nie uwzględni warunku  $x \neq 3$ , to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

##### Sposób I

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postacie:  $(-\infty, -3)$  i  $[-3, 3)$  i  $[3, +\infty)$ .

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy  $x \in (-\infty, -3)$ )

W tym przypadku nierówność ma postać  $-2x + 6 - x^2 + 9 < 0$ . Stąd otrzymujemy:

$$-x^2 - 2x + 15 < 0$$

$$-(x+5)(x-3) < 0$$

Zatem  $x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$  i  $x \in (-\infty, -3)$ , więc  $x \in (-\infty, -5)$ .

Przypadek 2. (gdy  $x \in [-3, 3)$ )

W tym przypadku nierówność ma postać  $-2x + 6 + x^2 - 9 < 0$ . Stąd otrzymujemy:

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

Zatem  $x \in (-1, 3)$  i  $x \in [-3, 3)$ , więc  $x \in (-1, 3)$ .

Przypadek 3. (gdy  $x \in [3, +\infty)$ )

W tym przypadku nierówność ma postać  $2x - 6 - x^2 + 9 < 0$ . Stąd otrzymujemy:

$$-x^2 + 2x + 3 < 0$$

$$-(x+1)(x-3) < 0$$

Zatem  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  i  $x \in [3, +\infty)$ , więc  $x \in (3, +\infty)$ .

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności  $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$  są wszystkie liczby ze zbioru  $(-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$ .

### Sposób II

Przekształcamy nierówność, korzystając z własności wartości bezwzględnej oraz wzoru na różnicę kwadratów:

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$$

$$2 \cdot |x - 3| - |x - 3| \cdot |x + 3| < 0$$

$$|x - 3| \cdot (2 - |x + 3|) < 0$$

Stąd  $|x - 3| \neq 0$  i  $2 - |x + 3| < 0$ . Zatem

$$x \neq 3 \quad \wedge \quad |x + 3| > 2$$

$$x \neq 3 \quad \wedge \quad (x + 3 < -2 \vee x + 3 > 2)$$

$$x \neq 3 \quad \wedge \quad (x < -5 \vee x > -1)$$

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

### Sposób IIa

Dla  $x = 3$  wartość wyrażenia  $|2x - 6| - |x^2 - 9|$  jest równa 0, więc nierówność nie jest spełniona.

Przekształcamy nierówność, korzystając z własności wartości bezwzględnej oraz ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$$

$$\begin{aligned}1 &< \frac{|x^2 - 9|}{|2x - 6|} \wedge x \neq 3 \\1 &< \frac{|x - 3| \cdot |x + 3|}{2 \cdot |x - 3|} \wedge x \neq 3 \\1 &< \frac{|x + 3|}{2} \wedge x \neq 3 \\x &\neq 3 \wedge |x + 3| > 2 \\x &\neq 3 \wedge (x + 3 < -2 \vee x + 3 > 2) \\x &\neq 3 \wedge (x < -5 \vee x > -1) \\x &\in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)\end{aligned}$$

*Sposób IIb (poprzez nierówność wielomianową)*

Przekształcamy nierówność, korzystając z własności wartości bezwzględnej oraz ze wzoru na różnicę kwadratów i kwadrat sumy:

$$\begin{aligned}|2x - 6| &< |x^2 - 9| \\|2x - 6|^2 &< |x^2 - 9|^2 \\(2x - 6)^2 &< (x^2 - 9)^2 \\4(x - 3)^2 &< (x - 3)^2(x + 3)^2 \\(x - 3)^2[4 - (x + 3)^2] &< 0 \\(x - 3)^2(-1 - x)(x + 5) &< 0 \\(x - 3)^2(x + 1)(x + 5) &> 0\end{aligned}$$

Stąd

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

*Sposób III (poprzez koniunkcję nierówności)*

Dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwe są równoważności:

(1)  $|x| < a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x < a$  i  $x > -a$

oraz

(2)  $|x| > a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x > a$  lub  $x < -a$ .

Przekształcamy nierówność  $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$ , korzystając z równoważności (1):

$$\begin{aligned}2x - 6 &< |x^2 - 9| \quad \text{i} \quad 2x - 6 > -|x^2 - 9| \\|x^2 - 9| &> 2x - 6 \quad \text{i} \quad |x^2 - 9| > -2x + 6\end{aligned}$$

Rozwiązujemy każdą z otrzymanych nierówności, korzystając z równoważności (2):

$$(x^2 - 9 > 2x - 6 \vee x^2 - 9 < -2x + 6) \wedge (x^2 - 9 > -2x + 6 \vee x^2 - 9 < 2x - 6)$$

$$(x^2 - 2x - 3 > 0 \vee x^2 + 2x - 15 < 0) \wedge (x^2 + 2x - 15 > 0 \vee x^2 - 2x - 3 < 0)$$

$$[(x+1)(x-3) > 0 \vee (x+5)(x-3) < 0] \wedge (x^2 + 2x - 15 > 0 \vee x^2 - 2x - 3 < 0)$$

$$[x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \vee x \in (-5, 3)] \wedge [(x+5)(x-3) > 0 \vee (x+1)(x-3) < 0]$$

$$[x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \vee x \in (-5, 3)] \wedge [x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty) \vee x \in (-1, 3)]$$

$$x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) \wedge x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności  $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$  są wszystkie liczby ze zbioru  $(-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$ .

#### Zadanie 6. (0–4)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                                                  | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Zdający:<br>VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym. |

#### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(-1\ 026\ 168)$ .

3 pkt – obliczenie liczby  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:  $n = 1014$ .

2 pkt – rozwiązanie równania z jedną niewiadomą  $r$ :  $r = 0$  oraz  $r = -2$

ALBO

– obliczenie różnicy ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  spełniającej warunki zadania:

$$r = -2,$$

ALBO

– rozwiązanie równania z jedną niewiadomą  $q$ :  $q = 1$  oraz  $q = 3$ ,

ALBO

– obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego  $(a_2, a_3, a_6)$  spełniającego warunki zadania:  $q = 3$ ,

ALBO

– obliczenie/zapisanie, że ciąg  $(a_2, a_3, a_6)$  nie jest stały i rozwiązanie równania z jedną niewiadomą  $a_2$ :  $a_2 = -1$ ,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą  $n$ , np.

$$\left(1 + 2 \cdot \frac{-2026}{n-1}\right)^2 = \left(1 + \frac{-2026}{n-1}\right) \left(1 + 5 \cdot \frac{-2026}{n-1}\right)$$

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą  $r$ , np.  $(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą  $q$ , np.  $3q - 3 = q^2 - q$ ,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a_2$ , np.  $a_2 = 1 + 2a_2$  (dla sposobu III),

ALBO

– wyznaczenie różnicy ciągu  $(a_n)$  w zależności od liczby  $n$  wyrazów ciągu

arytmetycznego  $(a_n)$ :  $r = \frac{-2026}{n-1}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

1. Jeżeli zdający myli ciąg arytmetyczny z ciągiem geometrycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający stosuje błędny wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma wartość  $n$ , która nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać **2 punkty** za całe rozwiązanie (traktujemy to jak obliczenie liczby wyrazów ciągu arytmetycznego z błędem rachunkowym). Zdający nie otrzymuje punktu za obliczenie sumy wyrazów ciągu arytmetycznego.
4. a) Jeżeli zdający przyjmie, że  $r = -2$  i sprawdzi rachunkiem, że ta wartość spełnia warunki zadania, ale nie uzasadni, że jest to jedyna wartość  $r$  spełniająca warunki zadania, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za obliczenie  $n$  oraz za obliczenie sumy).  
b) Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że  $r = -2$  i na tym opiera swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

##### Sposób I

Niech  $r$  oznacza różnicę ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ . Ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy:  $a_2 = 1 + r$ ,  $a_3 = 1 + 2r$ ,  $a_6 = 1 + 5r$  oraz  $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$ . Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$$

$$0 = 2r + r^2$$

$$0 = r(2 + r)$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = -2$$

Dla  $r = 0$  warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  nie są równe.

Dla  $r = -2$  otrzymujemy  $a_2 = -1$ ,  $a_3 = -3$ ,  $a_6 = -9$ . Ciąg  $(-1, -3, -9)$  jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione.

Obliczamy liczbę  $n$  wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę  $S_{1014}$  wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

### Sposób II

Niech  $r$  oznacza różnicę ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ . Niech  $q$  oznacza iloraz ciągu geometrycznego  $(a_2, a_3, a_6)$ . Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  jest malejący, więc ciąg  $(a_2, a_3, a_6)$  nie jest stały. Zatem  $q \neq 1$  oraz  $a_2 \neq 0$ . Ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego i własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy:  $a_3 = a_2 \cdot q$ ,  $a_6 = a_2 \cdot q^2$  oraz  $3(a_3 - a_2) = a_6 - a_3$ . Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$\begin{aligned} 3(a_3 - a_2) &= a_6 - a_3 \\ 3a_2 \cdot q - 3a_2 &= a_2 \cdot q^2 - a_2 \cdot q \\ 0 &= a_2 \cdot (q^2 - 4q + 3) \\ a_2 = 0 \quad \vee \quad q^2 - 4q + 3 &= 0 \\ a_2 = 0 \quad \vee \quad q = 1 \quad \vee \quad q = 3 \end{aligned}$$

Dla  $a_2 = 0$  oraz dla  $q = 1$  warunki zadania nie są spełnione, czyli  $q = 3$ . Zatem  $a_3 = 3a_2$ ,  $a_6 = 9a_2$ .

Korzystamy z własności ciągu arytmetycznego i obliczamy  $a_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_3}{2} &= a_2 \\ \frac{1 + 3a_2}{2} &= a_2 \\ a_2 &= -1 \end{aligned}$$

Ponieważ  $a_1 = 1$  i  $a_2 = -1$ , więc różnica ciągu arytmetycznego jest równa  $(-2)$ . Obliczamy liczbę  $n$  wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$\begin{aligned} -2025 &= 1 + (n - 1) \cdot (-2) \\ n &= 1014 \end{aligned}$$

Obliczamy sumę  $S_{1014}$  wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

### Sposób III

Niech  $r$  oznacza różnicę ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ . Ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego otrzymujemy:  $a_3 = a_2 + r$ ,  $a_6 = a_2 + 4r$  oraz  $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$ . Stąd i z warunków zadania dostajemy:

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$$

$$(a_2 + r)^2 = a_2 \cdot (a_2 + 4r)$$

$$a_2^2 + 2a_2r + r^2 = a_2^2 + 4a_2r$$

$$0 = r(2a_2 - r)$$

$$r = 0 \vee r = 2a_2$$

Dla  $r = 0$  warunki zadania nie są spełnione, ponieważ pierwszy i ostatni wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  nie są równe.

Dla  $r = 2a_2$  otrzymujemy  $a_2 = 1 + 2a_2$ . Stąd  $a_2 = -1$ , więc  $r = -2$ . Zatem  $a_3 = -3$  oraz  $a_6 = -9$ . Ciąg  $(-1, -3, -9)$  jest geometryczny, więc warunki zadania są spełnione. Obliczamy liczbę  $n$  wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$-2025 = 1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$n = 1014$$

Obliczamy sumę  $S_{1014}$  wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = -1\,026\,168$$

### Zadanie 7. (0–4)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymaganie szczegółowe                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne. |

### Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik, np.:  $\frac{\pi k}{2}$  oraz  $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$  oraz

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

3 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych i rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy, np.:

- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos^2(2x) = \frac{3}{4})$  oraz  
 $x = \frac{\pi k}{2}$  (rozwiązania równania  $\sin(2x) = 0$ )

- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2})$  oraz  
 $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$  oraz  $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$  (rozwiązania równania  $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ )
- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos(4x) = \frac{1}{2})$  oraz  
 $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$  oraz  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$  (rozwiązania równania  $\cos(4x) = \frac{1}{2}$ )
- $(\sin(2x) = 0 \text{ lub } \sin(2x) = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin(2x) = \frac{1}{2})$  oraz  
 $x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$  oraz  $x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$  (rozwiązania równania  $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$ ),  
gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

2 pkt – przekształcenie równania do postaci alternatywy równań trygonometrycznych, np.:

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos^2(2x) = \frac{3}{4},$$

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } 2 \cos(4x) - 1 = 0,$$

$$\sin(2x) = 0 \text{ lub } 4 \sin^2(2x) - 1 = 0.$$

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus sumy i przekształcenie równania do postaci

$$\sin(4x) \cos(2x) + \cos(4x) \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0 \text{ (dla sposobu I)}$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na różnicę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$$2 \cos(4x) \sin(2x) - \sin(2x) = 0 \text{ (dla sposobu II),}$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus potrojonego kąta i przekształcenie równania do postaci

$$-4 \sin^3(2x) + 3 \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0 \text{ (dla sposobu III).}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwagi:

**1. a)** Jeżeli zdający popełni błędy, które nie są rachunkowe, nie zrealizuje wymagań z kryterium za 1 punkt, przekształci równanie do postaci  $\sin(2x) \cdot f(x) = 0$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za rozwiązanie równania  $\sin(2x) = 0$ ).

**b)** Jeżeli zdający zrealizuje wymagania z kryterium za 1 punkt, a następnie popełni błędy, które nie są rachunkowe, przekształci równanie do postaci  $\sin(2x) \cdot f(x) = 0$  i rozwiąże równanie  $\sin(2x) = 0$ , to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**2.** Jeżeli zdający popełni tylko błędy rachunkowe i przekształci równanie do postaci  $\sin(2x) \cdot f(x) = 0$ , gdzie funkcja trygonometryczna  $f$  nie ma miejsc zerowych lub równanie trygonometryczne  $f(x) = 0$  ma jedną serię rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, oraz rozwiąże równanie  $\sin(2x) = 0$ , otrzymując  $x = \frac{\pi k}{2}$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył praw do innej punktacji.

3. Jeżeli zdający przyjmie  $u = 2x$  i rozwiąże równanie  $\sin(3u) - 2 \sin u = 0$  (lub równanie  $-4 \sin^3 u + 3 \sin u - 2 \sin u = 0$ ) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, to otrzymuje **3 punkty**.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I (poprzez sinus sumy)

Przekształcamy równanie  $\sin(6x) - 2 \sin(2x) = 0$  równoważnie, stosując wzór na sinus sumy kątów i cosinus podwojonego kąta:

$$\sin(4x + 2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$\sin(4x) \cos(2x) + \cos(4x) \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$2 \sin(2x) \cos^2(2x) + [2 \cos^2(2x) - 1] \sin(2x) - 2 \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) [4 \cos^2(2x) - 3] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos^2(2x) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rozwiązujemy równanie  $\sin(2x) = 0$ :

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Rozwiązujemy równanie  $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ :

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Rozwiązujemy równanie  $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ :

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Rozwiązaniami równania  $\sin(6x) - 2 \sin(2x) = 0$  są wszystkie liczby postaci:

$\frac{\pi k}{2}$ ,  $-\frac{5\pi}{12} + \pi k$ ,  $\frac{5\pi}{12} + \pi k$ ,  $-\frac{\pi}{12} + \pi k$  oraz  $\frac{\pi}{12} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Sposób II (poprzez różnicę sinusów)**

Przekształcamy równanie  $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$  równoważnie, stosując wzór na różnicę sinusów:

$$\sin(6x) - \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \sin\left(\frac{6x-2x}{2}\right) - \sin(2x) = 0$$

$$2 \cos(4x) \sin(2x) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) [2 \cos(4x) - 1] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \cos(4x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \quad \vee \quad 4x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \vee \quad 4x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Rozwiązaniami równania  $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$  są wszystkie liczby postaci:

$\frac{\pi k}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$  oraz  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Sposób III (poprzez sinus potrojonego kąta)**

Przekształcamy równanie  $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$  równoważnie, stosując wzór na sinus potrojonego kąta:

$$\sin(3 \cdot 2x) - 2\sin(2x) = 0$$

$$-4\sin^3(2x) + 3\sin(2x) - 2\sin(2x) = 0$$

$$\sin(2x) [-4\sin^2(2x) + 1] = 0$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \sin^2(2x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(2x) = 0 \quad \vee \quad \sin(2x) = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Rozwiązaniami równania  $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$  są wszystkie liczby postaci:

$\frac{\pi k}{2}$ ,  $\frac{\pi}{12} + \pi k$ ,  $\frac{5\pi}{12} + \pi k$ ,  $\frac{7\pi}{12} + \pi k$  oraz  $\frac{11\pi}{12} + \pi k$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Zadanie 8. (0–4)**

| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>X.R2) wyznacza przekroje [...] ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $a = 3\sqrt{6}$  oraz  $\cos \beta = \frac{5}{14}$ .

3 pkt – obliczenie wysokości  $x$  ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa:

$$x = \sqrt{42}$$

ALBO

– obliczenie  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ :  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ ,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi podstawy:  $a = 3\sqrt{6}$  **oraz** zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , np.

$$1 = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 - \cos \beta), \quad 1 = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha},$$

ALBO

– obliczenie cosinusa kąta  $\beta$ :  $\cos \beta = \frac{5}{14}$ .

2 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ :  $a = 3\sqrt{6}$  oraz

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

ALBO

– zapisanie związków  $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{7}}{3}$  oraz  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{|EB|}{x}$ ,

ALBO

– obliczenie długości (lub kwadratu długości)  $b$  krawędzi bocznej ostrosłupa:  $b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

(lub  $b^2 = \frac{243}{4}$ ),

ALBO

– zapisanie zależności między długością krawędzi bocznej ostrosłupa i wysokością

ściany bocznej opuszczonej na krawędź boczną ostrosłupa, np.:  $\frac{x}{b} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ ,

$$\frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{1}{2} b \cdot x, \quad \left(\frac{5}{9}b\right)^2 + x^2 = b^2,$$

ALBO

– zapisanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , np.

$$1 = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 - \cos \beta), \quad 1 = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}.$$

1 pkt – obliczenie długości  $a$  krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a = 3\sqrt{6}$

ALBO

– obliczenie  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) : \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ,

ALBO

– obliczenie  $\sin \alpha$ :  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}$ ,

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta  $ABD$  i zapisanie równania

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \beta$$

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta  $BCS$  i zapisanie równania

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos \alpha$$

ALBO

– zapisanie zależności między  $a$ ,  $x$  oraz  $\alpha$ , np.  $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{a}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{a}$ ,

ALBO

– zapisanie zależności między  $b$ ,  $x$  oraz  $\alpha$ , np.  $\sin \alpha = \frac{x}{b}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do ściany bocznej – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub długości krawędzi bocznej – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika piątego z kategorii za **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zinterpretuje kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa i zastosuje twierdzenie cosinusów do trójkąta z tym kątem – pomimo błędnie obliczonej długości krawędzi podstawy lub wysokości ściany bocznej poprowadzonej z wierzchołka podstawy ostrosłupa – to traktujemy to jak spełnienie kryterium z myślnika czwartego z kategorii za **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między krawędziami bocznymi ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę niż ostrosłup prawidłowy trójkątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A, B, C$  – wierzchołki podstawy ostrosłupa,

$S$  – wierzchołek ostrosłupa,

$D$  – punkt wspólny wysokości ściany bocznej  $BCS$  poprowadzonej z wierzchołka  $B$

i wysokości ściany bocznej  $ACS$  poprowadzonej z wierzchołka  $A$ ,

$E, F$  – środki krawędzi – odpowiednio –  $AB$  i  $BC$ ,

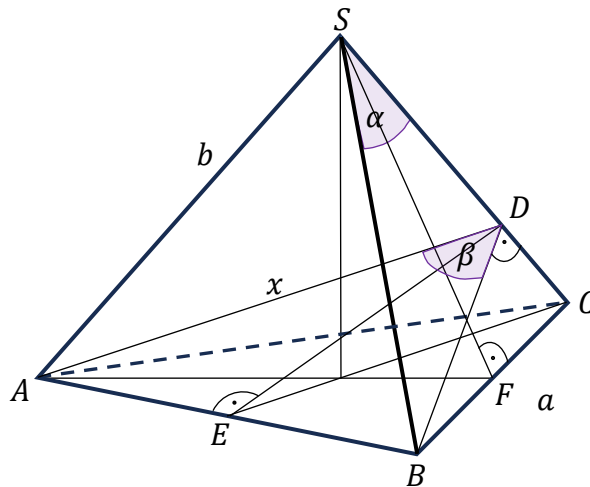
$\alpha$  – miara kąta  $BSC$ ,

$\beta$  – miara kąta dwuściennego zawartego między ścianami bocznymi  $BCS$  i  $ACS$  ostrosłupa  $ABCS$ ,

$a$  – długość krawędzi podstawy  $ABC$ ,

$b$  – długość krawędzi bocznej,

$x$  – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy  $ABC$  (zobacz rysunek).



*Sposób I (z pominięciem krawędzi bocznej)*

Obliczamy promień  $R$  okręgu opisanego na podstawie  $ABC$ :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ :

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\frac{5}{9} = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \vee \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ  $\alpha < 180^\circ$ , więc  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$ .

Ponieważ  $|\angle FCS| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ , więc  $|\angle CBD| = \frac{\alpha}{2}$ . Zatem:

$$\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$x = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$x = \sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $ABD$  i obliczamy  $\cos \beta$ :

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$(3\sqrt{6})^2 = 2 \cdot 42 - 2 \cdot 42 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{5}{14}$$

*Sposób II (poprzez krawędź boczną)*

Obliczamy promień  $R$  okręgu opisanego na podstawie  $ABC$ :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $BCS$  i obliczamy długość krawędzi bocznej:

$$(3\sqrt{6})^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$54 = 2b^2 - 2b^2 \cdot \frac{5}{9}$$

$$b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BFS$  i obliczamy wysokość  $SF$  ściany bocznej  $BCS$ :

$$|SF| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$|SF| = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

Korzystamy z podobieństwa trójkątów  $CDB$  oraz  $BFS$  i obliczamy długość  $BD$ :

$$\frac{x}{a} = \frac{|SF|}{b}$$

$$x = a \cdot \frac{|SF|}{b}$$

$$x = 3\sqrt{6} \cdot \frac{\frac{3\sqrt{21}}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{42}$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $ABD$  i obliczamy  $\cos \beta$ :

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$(3\sqrt{6})^2 = 2 \cdot 42 - 2 \cdot 42 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{5}{14}$$

*Sposób III (poprzez  $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$ )*

Obliczamy promień  $R$  okręgu opisanego na podstawie  $ABC$ :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

Stosujemy wzór na cosinus podwojonego kąta i obliczamy  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ :

$$\cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\frac{5}{9} = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \vee \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Ponieważ  $\alpha < 180^\circ$ , więc  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$ .

Ponieważ  $|\angle FCS| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ , więc  $|\angle CBD| = \frac{\alpha}{2}$  i  $\frac{x}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . Stąd i ze związku

$\frac{|EB|}{x} = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$  otrzymujemy:

$$\frac{|EB|}{a} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

Obliczamy  $\cos \beta$ :

$$\cos \beta = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos \beta = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{7}}\right)^2$$

$$\cos \beta = \frac{5}{14}$$

#### Sposób IV

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $BDA$  i otrzymujemy:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \cos \beta$$

$$a^2 = 2x^2(1 - \cos \beta)$$

Z trójkąta prostokątnego  $BDS$  otrzymujemy  $\frac{x}{b} = \sin \alpha$ , więc  $x = b \cdot \sin \alpha$  i dlatego

$$a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta)$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $BCS$  i otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos \alpha)$$

Stąd i z zależności  $a^2 = 2b^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta)$  otrzymujemy:

$$2b^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos \beta) = 2b^2(1 - \cos \alpha)$$

$$1 - \cos \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$1 - \cos \beta = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$1 - \cos \beta = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{5}{9}}{1 + \frac{5}{9}} = \frac{5}{14}$$

Obliczamy promień  $R$  okręgu opisanego na podstawie  $ABC$ :

$$2\pi R = 6\sqrt{2}\pi$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3\sqrt{6}$$

### Zadanie 9. (0–5)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>IX.R3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie;<br>IX.R4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej doadanego okręgu. |

### Zasady oceniania (dla sposobu I)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$ .

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $C$  oraz  $M$ :  $C = (2, 1)$  oraz  $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu  $C$  oraz długości odcinka  $MC$ :  $C = (2, 1)$

oraz  $|MC| = \frac{4}{\sqrt{5}}$ .

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (2, 1)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu  $C$ ),  
**oraz** wyznaczenie współrzędnych punktu  $M$  w zależności od współrzędnych

punktów  $A$  oraz  $C$ , np.  $6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$  oraz

$x_M = \frac{1}{5}(x_C - x_A) + x_A$  oraz  $y_M = \frac{1}{5}(y_C - y_A) + y_A$ .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą lub drugą współrzędną punktu  $C$ ),

$$\text{np. } 6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0, \quad 6(4 - 2y_C) + 2y_C - 14 = 0$$

ALBO

- wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku  $AB$  trójkąta **oraz** wyznaczenie współrzędnych punktu  $M$  w zależności od współrzędnych punktów  $A$  oraz  $C$ , np.

$$6x + 2y - 14 = 0 \quad \text{oraz} \quad x_M = \frac{1}{5}(x_C - x_A) + x_A \quad \text{oraz} \quad y_M = \frac{1}{5}(y_C - y_A) + y_A.$$

1 pkt – wyznaczenie równania stopnia pierwszego symetralnej boku  $AB$  trójkąta, np.

$$6x + 2y - 14 = 0$$

ALBO

- zapisanie współrzędnych punktu  $C$  w zależności od jednej zmiennej, np.

$$C = \left(x_C, -\frac{1}{2}x_C + 2\right),$$

ALBO

- wyznaczenie współrzędnych punktu  $M$  w zależności od współrzędnych punktów  $A$

$$\text{oraz } C, \text{ np. } x_M = \frac{1}{5}(x_C - x_A) + x_A \quad \text{oraz} \quad y_M = \frac{1}{5}(y_C - y_A) + y_A.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

- Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu  $C = (2, 1)$  oraz uzasadni (np. rachunkowo), że ten punkt spełnia warunki zadania, to za tę część rozwiązania otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli zdający takiego uzasadnienia nie zapisze, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.
- a) Jeżeli zdający przyjmuje  $|AM| : |MC| = 4 : 1$ , to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.  
b) Jeżeli zdający przyjmuje stosunek  $|AM| : |MC|$  inny niż  $1 : 4$  lub  $4 : 1$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
- Jeżeli zdający przyjmie bez uzasadnienia, że prosta  $AC$  jest prostopadła do prostej  $BC$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za zapisanie współrzędnych punktu  $C$  w zależności od jednej zmiennej lub wyznaczenie/obliczenie współrzędnych punktu  $M$  w zależności od współrzędnych punktów  $A$  oraz  $C$ , oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie zadania do końca).

#### Zasady oceniania (dla sposobu II)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}.$

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $M$  oraz współrzędnych wektora  $\overrightarrow{AM}$  (lub

$$\text{współrzędnych wektora } \overrightarrow{MC}): M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{AM} = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right] \quad (\text{lub}$$

$$\overrightarrow{MC} = \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]).$$

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $D$  **oraz** wyznaczenie równania prostej  $ME$ :

$$D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right) \quad \text{oraz np. } y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5}$$

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu  $E$  oraz wyznaczenie równania prostej  $MD$ :

$$E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) \text{ oraz np. } y = -3\left(x - \frac{13}{10}\right) - \frac{9}{10}.$$

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $D$  oraz  $E$ :  $D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$  oraz

$$E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

ALBO

– wyznaczenie równania prostej  $MD$ , np.  $y = -3\left(x - \frac{13}{10}\right) - \frac{9}{10}$ ,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej  $ME$ , np.  $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5}$ .

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $D$ :  $D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$

ALBO

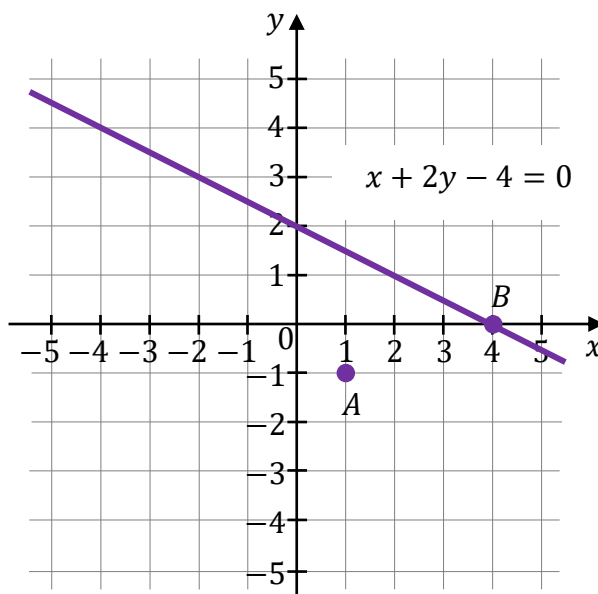
– obliczenie współrzędnych punktu  $E$ :  $E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Zauważmy, że punkt  $A$  nie leży na prostej  $x + 2y - 4 = 0$ , natomiast punkt  $B$  leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię  $BC$  trójkąta  $ABC$ .



Niech  $C = (x_C, y_C)$ . Wówczas  $y_C = -\frac{1}{2}x_C + 2$ . Ponieważ  $|CA| = |CB|$ , więc

$$|CA|^2 = |CB|^2$$

$$(1 - x_C)^2 + (-1 - y_C)^2 = (4 - x_C)^2 + (0 - y_C)^2$$

$$1 - 2x_C + x_C^2 + 1 + 2y_C + y_C^2 = 16 - 8x_C + x_C^2 + y_C^2$$

$$6x_C + 2y_C - 14 = 0$$

$$6x_C + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x_C + 2\right) - 14 = 0$$

$$x_C = 2$$

Zatem  $C = (2, 1)$ .

Niech  $M = (x_M, y_M)$ . Z warunków zadania wynika, że  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AC}$ . Obliczamy współrzędne punktu  $M$ :

$$[x_M - 1, y_M - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [2 - 1, 1 - (-1)]$$

$$x_M - 1 = \frac{1}{5} \quad \wedge \quad y_M + 1 = \frac{2}{5}$$

Zatem  $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ .

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt  $C$  i ma środek w punkcie  $M$ :

$$|MC|^2 = \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt  $C$  i ma środek w punkcie  $M$ , ma postać

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

### Sposób II

Niech  $D = (x_D, y_D)$  będzie punktem przecięcia prostej  $AB$  z prostą, która jest prostopadła do  $AB$  i przechodzi przez punkt  $M$ .

Niech  $E = (x_E, y_E)$  będzie punktem przecięcia prostej  $AB$  z prostą, która jest równoległa do  $BC$  i przechodzi przez punkt  $M$ .

Zauważmy, że punkt  $A$  nie leży na prostej  $x + 2y - 4 = 0$ , natomiast punkt  $B$  leży na tej prostej. Zatem w tej prostej zawiera się ramię  $BC$  trójkąta  $ABC$ .

Z warunków zadania oraz twierdzenia Talesa otrzymujemy:

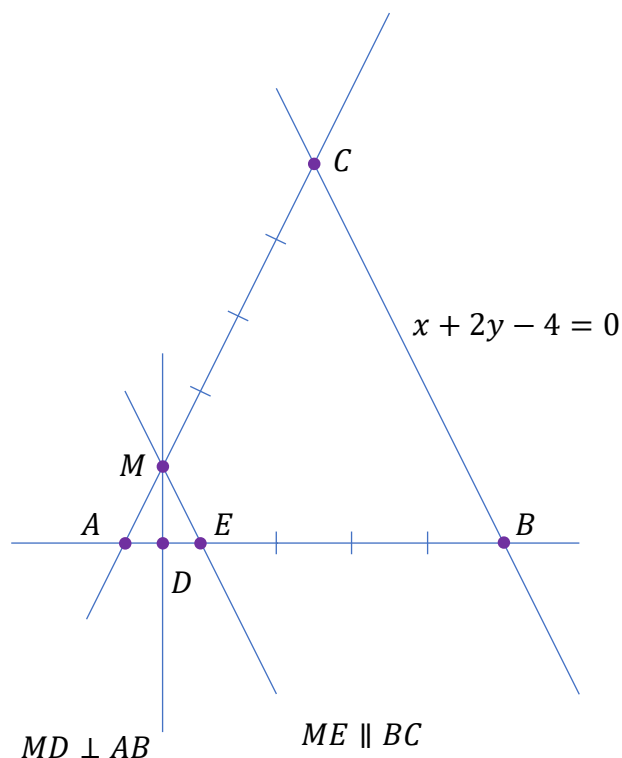
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_E - 1, y_E - (-1)] = \frac{1}{5} \cdot [4 - 1, 0 - (-1)]$$

$$x_E - 1 = \frac{3}{5} \quad \wedge \quad y_E + 1 = \frac{1}{5}$$

Stąd  $E = \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ .

Zatem prosta  $ME$  ma równanie  $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{5}\right) - \frac{4}{5}$ , czyli  $y = -\frac{1}{2}x$ .



Ponieważ  $ME \parallel BC$ , więc trójkąt  $AME$  jest równoramienny i  $|AM| = |ME|$ . Stąd prosta  $MD$  jest symetralną odcinka  $AE$ . Zatem punkt  $D$  dzieli odcinek  $AB$  w stosunku  $1 : 9$  (licząc od punktu  $A$ ). Obliczamy współrzędne punktu  $D$ :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{10} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[x_D - 1, y_D - (-1)] = \frac{1}{10} \cdot [4 - 1, 0 - (-1)]$$

$$x_D - 1 = \frac{3}{10} \quad \wedge \quad y_D + 1 = \frac{1}{10}$$

Stąd  $D = \left(\frac{13}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ .

Współczynnik kierunkowy  $a_{AB}$  prostej  $AB$  jest równy  $a_{AB} = \frac{0 - (-1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}$ , więc prosta

$MD$  ma równanie  $y = -3\left(x - \frac{13}{10}\right) - \frac{9}{10}$ , czyli  $y = -3x + 3$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $M$ :

$$-\frac{1}{2}x = -3x + 3$$

$$x = \frac{6}{5}$$

Stąd  $M = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ .

Z warunków zadania

$$\overrightarrow{MC} = 4 \cdot \overrightarrow{AM} = 4 \cdot \left[ \frac{6}{5} - 1, -\frac{3}{5} - (-1) \right] = \left[ \frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right]$$

Obliczamy kwadrat promienia okręgu, który przechodzi przez punkt  $C$  i ma środek w punkcie  $M$ :

$$|\overrightarrow{MC}|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

Równanie okręgu, który przechodzi przez punkt  $C$  i ma środek w punkcie  $M$ , ma postać

$$\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

#### Zadanie 10. (0–5)

| Wymagania ogólne                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.<br>3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. | Zdający:<br>III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...]. |

#### Zasady oceniania (dla sposobu I)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(1, +\infty)$ .

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech spośród warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie wszystkich warunków 1) – 5):

1)  $f(p) < 0$  (lub  $q < 0$ , lub  $\Delta > 0$ ),

2)  $p > -2$ ,

3)  $p < 2$ ,

4)  $f(-2) > 0$ ,

5)  $f(2) > 0$ ,

ALBO

– rozwiązanie jednego z warunków 1) – 5):

1)  $f(p) < 0$  (lub  $q < 0$ , lub  $\Delta > 0$ ):  $m \in (0, +\infty)$ ,

2)  $p > -2$ :  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$ ,

3)  $p < 2$ :  $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,

4)  $f(-2) > 0$ :  $m \in \mathbb{R}$ ,

5)  $f(2) > 0$ :  $m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$ , to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający:

- a) nie rozwiąże wszystkich warunków 1) – 5) określonych w kryterium za 1 punkt albo
- b) podczas rozwiązywania warunków 1) – 5) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo
- c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Zasady oceniania (dla sposobu II)**

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(1, +\infty)$ .

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** IV), **oraz** zapisanie  $x_1 < x_2$ .

3 pkt – spełnienie czterech spośród warunków I) – V) określonych w kryterium za 2 punkty

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** III), **oraz** zapisanie  $x_1 < x_2$ ,

ALBO

– spełnienie warunków I) **oraz** IV), **oraz** zapisanie  $x_1 < x_2$ ,

ALBO

– spełnienie warunków III) **oraz** IV), **oraz** zapisanie  $x_1 < x_2$ .

2 pkt – spełnienie warunku I) i jednego z warunków II) – V):

I) wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma

dokładnie dwa miejsca zerowe oraz wyznaczenie miejsc zerowych  $x_1$  oraz  $x_2$

funkcji  $f$  w zależności od  $m$ :  $m \in (0, +\infty)$  i  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$  oraz  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$ ,

II) rozwiązanie nierówności  $x_1 < 2$ :  $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ ,

III) rozwiązanie nierówności  $-2 < x_1$ :  $m \in (0, +\infty)$ ,

IV) rozwiązanie nierówności  $x_2 < 2$ :  $m \in (1, +\infty)$ ,

V) rozwiązanie nierówności  $-2 < x_2$ :  $m \in (0, +\infty)$ ,

ALBO

– spełnienie trzech spośród warunków II) – V).

1 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe:  $m \in (0, +\infty)$

ALBO

– wyznaczenie miejsc zerowych funkcji  $f$  w zależności od  $m$ :  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$  oraz

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$ , to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający:

- a) nie rozwiąże wszystkich warunków I) – V) określonych w kryterium za 1 punkt albo
- b) podczas rozwiązywania warunków I) – V) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo
- c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Zasady oceniania (dla sposobu III)**

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $(1, +\infty)$ .

4 pkt – rozwiązanie pięciu warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

3 pkt – rozwiązanie czterech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

2 pkt – rozwiązanie trzech warunków spośród warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie warunków A) – E):

A)  $\Delta > 0$ ,

B)  $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$ ,

C)  $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ ,

D)  $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$ ,

E)  $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ ,

ALBO

– rozwiązanie jednego z warunków A) – E):

A)  $\Delta > 0$ :  $m \in (0, +\infty)$ ,

B)  $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$ :  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$ ,

C)  $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ :  $m \neq 0$ ,

D)  $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$ :  $m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,

E)  $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ :  $m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający rozwiązuje warunek  $\Delta \geq 0$ , to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający:

- a) nie rozwiąże wszystkich warunków A) – E) określonych w kryterium za 1 punkt albo
- b) podczas rozwiązywania warunków A) – E) popełni błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, których część wspólna jest zbiorem pustym, albo
- c) popełni błąd, który nie jest rachunkowy,

to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I (poprzez interpretację geometryczną)

Ponieważ  $m \neq 0$ , więc współczynnik przy  $x^2$  jest dodatni. Zatem parabola, która jest wykresem funkcji  $f$ , ma ramiona skierowane ku górze.

Stąd funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe należące do przedziału  $(-2, 2)$  tylko wtedy, gdy spełnione będą następujące warunki:

- 1)  $f(p) < 0$  (lub  $q < 0$ , lub  $\Delta > 0$ )
- 2)  $p > -2$
- 3)  $p < 2$
- 4)  $f(-2) > 0$
- 5)  $f(2) > 0$ .

Rozwiązujemy warunek 1):

$$f(p) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) < 0$$

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 - 2m \cdot \frac{1}{m} - m + 1 < 0$$

$$-m < 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Warunki 2) oraz 3) można rozwiązać za pomocą nierówności podwójnej:

$$p \in (-2, 2)$$

$$-2 < -\frac{2m}{2m^2} < 2$$

$$-2 < \frac{1}{m} < 2$$

$$\frac{1}{|m|} < 2$$

$$|m| > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek 4):

$$f(-2) > 0$$

$$m^2 \cdot (-2)^2 - 2m \cdot (-2) - m + 1 > 0$$

$$4m^2 + 3m + 1 > 0$$

$$\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0$$

$$m \in \mathbb{R}$$

Rozwiązujemy warunek 5):

$$f(2) > 0$$

$$m^2 \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 - m + 1 > 0$$

$$4m^2 - 5m + 1 > 0$$

$$4(m-1)\left(m - \frac{1}{4}\right) > 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , które jednocześnie spełniają warunki 1) – 5) oraz  $m \neq 0$ :  $m \in (1, +\infty)$ .

Funkcja  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału  $(-2, 2)$  tylko wtedy, gdy  $m \in (1, +\infty)$ .

#### Sposób II (poprzez wyznaczenie miejsc zerowych)

Przy  $m \neq 0$  funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$  należące do przedziału  $(-2, 2)$ , gdy spełnione są następujące warunki:

- I)  $\Delta > 0$
- II)  $x_1 < 2$
- III)  $-2 < x_1$
- IV)  $x_2 < 2$
- V)  $-2 < x_2$ .

Rozwiązujemy nierówność  $b^2 - 4ac > 0$ :

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Wtedy miejsca zerowe są równe:

$$x_1 = \frac{2m - 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$$

oraz

$$x_2 = \frac{2m + 2m \cdot \sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

Rozwiązujemy nierówność  $-2 < x_1 < 2$ :

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{m}}{m} < 2$$

$$(-2m < 1 - \sqrt{m} \wedge m > 0) \wedge (1 - \sqrt{m} < 2m \wedge m > 0)$$

$$(2m - \sqrt{m} + 1 > 0 \wedge m > 0) \wedge (2m + \sqrt{m} - 1 > 0 \wedge m > 0)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \wedge m > 0\right) \wedge \left(2(\sqrt{m} + 1)\left(\sqrt{m} - \frac{1}{2}\right) > 0 \wedge m > 0\right)$$

$$m > 0 \wedge \left(\left(\sqrt{m} < -1 \vee \sqrt{m} > \frac{1}{2}\right) \wedge m > 0\right)$$

$$m > 0 \wedge \left(m > \frac{1}{4} \wedge m > 0\right)$$

$$m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy nierówność  $-2 < x_2 < 2$ :

$$-2 < \frac{1 + \sqrt{m}}{m} < 2$$

$$(-2m < 1 + \sqrt{m} \wedge m > 0) \wedge (1 + \sqrt{m} < 2m \wedge m > 0)$$

$$(2m + \sqrt{m} + 1 > 0 \wedge m > 0) \wedge (2m - \sqrt{m} - 1 > 0 \wedge m > 0)$$

$$\left(2\left(\sqrt{m} + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \wedge m > 0\right) \wedge \left(2(\sqrt{m} - 1)\left(\sqrt{m} + \frac{1}{2}\right) > 0 \wedge m > 0\right)$$

$$m > 0 \wedge \left(\left(\sqrt{m} < -\frac{1}{2} \vee \sqrt{m} > 1\right) \wedge m > 0\right)$$

$$m > 0 \wedge (m > 1 \wedge m > 0)$$

$$m \in (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , które jednocześnie spełniają warunki I) – V) oraz  $m \neq 0$ :  $m \in (1, +\infty)$ .

Funkcja  $f$  ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału  $(-2, 2)$  tylko wtedy, gdy  $m \in (1, +\infty)$ .

Uwaga.

Wszystkie wartości  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe oraz te miejsca zerowe, można wyznaczyć również następująco.

$$f(x) = m^2 x^2 - 2mx - m + 1$$

$$f(x) = (mx - 1)^2 - m$$

$$(mx - 1)^2 - m = 0$$

$$(mx - 1)^2 = m$$

Dla  $m \leq 0$  to równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych, natomiast dla  $m > 0$  otrzymujemy:

$$mx - 1 = -\sqrt{m} \quad \vee \quad mx - 1 = \sqrt{m}$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{m}}{m} \quad \vee \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

Zatem funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wtedy, gdy  $m \in (0 + \infty)$ .

### Sposób III (poprzez wzory Viète'a)

Przy  $m \neq 0$  funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$  należące do przedziału  $(-2, 2)$ , gdy spełnione są następujące warunki:

$$\Delta > 0 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_1 \quad \wedge \quad 0 < 2 - x_2 \quad \wedge \quad 0 < x_1 + 2 \quad \wedge \quad 0 < x_2 + 2$$

Liczby  $2 - x_1$  oraz  $2 - x_2$  są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie.

Liczby  $x_1 + 2$  oraz  $x_2 + 2$  są dodatnie tylko wówczas, gdy ich suma i iloczyn są dodatnie.

Zatem przy  $m \neq 0$  funkcja  $f$  ma dokładnie dwa miejsca zerowe  $x_1, x_2$  należące do przedziału  $(-2, 2)$  tylko wówczas, gdy spełnione są poniższe warunki:

- A)  $\Delta > 0$
- B)  $x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$
- C)  $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$
- D)  $2 - x_1 + 2 - x_2 > 0$
- E)  $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ .

Rozwiązujemy warunek A), tj. nierówność  $b^2 - 4ac > 0$ :

$$(-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-m + 1) > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek B), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0$$

$$\frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$4m^2 + 2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m + 1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek C), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m+1}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m+1+4m+4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2+3m+1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$\left(2m+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \neq 0$$

Rozwiązujemy warunek D), stosując wzory Viète'a:

$$2-x_1+2-x_2 > 0$$

$$4-\frac{2m}{m^2} > 0$$

$$4m^2-2m > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$2m(2m-1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Rozwiązujemy warunek E), stosując wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{-m+1}{m^2} - 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$-m+1-4m+4m^2 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$4m^2-5m+1 > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$(4m-1)(m-1) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 0$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru  $m$ , które jednocześnie spełniają warunki A) – E) oraz  $m \neq 0$ :  $m \in (1, +\infty)$ .

**Zadanie 11. (0–6)**

| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu. |

**Zasady oceniania**

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik:  $|BC| = 5$  i  $|CD| = 6$  oraz  $P = 30\sqrt{3}$ .

5 pkt – obliczenie długości boków  $BC$  oraz  $CD$ :  $|BC| = 5$  oraz  $|CD| = 6$ .

4 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku  $BC$  lub długością boku  $CD$ ), np.

$$91 = |BC|^2 + (|BC| + 1)^2 - 2 \cdot |BC| \cdot (|BC| + 1) \cdot \cos 120^\circ,$$

$$91 = \left(|BC| + 1 + \frac{1}{2} \cdot |BC|\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BC|\right)^2$$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi (długościami boków  $BC$  i  $CD$ ),

$$\text{np. } \begin{cases} 9 + |CD| = 10 + |BC| \\ (\sqrt{91})^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos 120^\circ \end{cases}$$

3 pkt – spełnienie wszystkich warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt  
ALBO

– spełnienie warunków 1) i 2) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta  $BCD$  i zapisanie równania

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos \angle BCD,$$

ALBO

– spełnienie warunków 2) i 3) określonych w kryterium za 1 punkt **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta  $BCD$  i zapisanie równania

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot \cos \angle BCD.$$

2 pkt – spełnienie dwóch spośród warunków 1) – 3) określonych w kryterium za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z warunków 1) – 3):

1) zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i zapisanie zależności między długością boku  $BC$  a długością boku  $CD$  czworokąta, np.  
 $9 + |CD| = 10 + |BC|,$

2) zapisanie jednego z dwóch równań:  $|BD|^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$  lub

$$|BD|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\right)^2 + (9 - 5)^2,$$

3) zastosowanie twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg i obliczenie miary kąta  $BCD$ :  $120^\circ$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

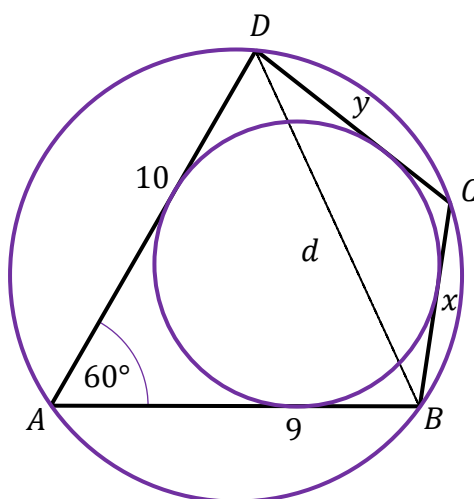
Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

- a) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów albo
- b) błędne zastosowanie wzoru redukcyjnego, albo
- c) błędne zastosowanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu (tj. zapisanie związku  $9 \cdot |CD| = 10 \cdot |BC|$  lub  $10 + |CD| = 9 + |BC|$ ), albo
- d) błędne zastosowanie własności miarowych trójkąta prostokątnego o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$ , albo
- e) błędna interpretacja obliczonej długości jednego z dwóch szukanych boków czworokąta,

ale zdający realizuje poprawnie strategię rozwiązania zadania, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów. Jeżeli zdający popełni dodatkowo błędy rachunkowe, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej liczby punktów.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przyjmijmy następujące oznaczenia:  $x = |BC|$ ,  $y = |CD|$ ,  $d = |BD|$  (zobacz rysunek).



Na czworokącie  $ABCD$  jest opisany okrąg, więc  $60^\circ + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ$ , czyli  $|\sphericalangle BCD| = 120^\circ$ .

W czworokąt  $ABCD$  jest wpisany okrąg, więc  $9 + y = 10 + x$ , czyli  $y = x + 1$ .

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $ABD$  i otrzymujemy

$$d^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta  $BCD$  i otrzymujemy:

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos 120^\circ$$

$$d^2 = x^2 + (x + 1)^2 + 2x(x + 1) \cdot \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 = 3x^2 + 3x - 90$$

$$0 = x^2 + x - 30$$

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -6 \notin (0, +\infty)$$

Stąd  $|BC| = 5$  i  $|CD| = |BC| + 1 = 6$ .

Pole czworokąta  $ABCD$  jest sumą pól trójkątów  $ABD$  i  $BCD$ .

Obliczamy pole  $P$  czworokąta  $ABCD$ :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

### Zadanie 12.1. (0–3)

| Wymagania ogólne                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Wymaganie szczegółowe                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| <p>II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</p> <p>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.</p> <p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.</p> | <p>Zdający:</p> <p>VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.</p> |

### Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – spełnienie kryterium zapisanego w pierwszym myślniku w kategorii za 1 punkt **oraz** zapisanie układu co najwyżej trzech równań niezależnych, umożliwiającego wyznaczenie  $h$  w zależności od  $x$   
ALBO

– wyznaczenie  $\operatorname{tg}(2\alpha)$  w zależności od  $x$ , np.  $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{4rx}{x^2 - 4r^2}$  (dla *sposobu II*),  
ALBO

– wyznaczenie zależności między  $P$  oraz  $x$ , np.  $P^2 = \frac{P}{r} \left( \frac{P}{r} - x \right) \cdot \frac{1}{4} x^2$   
(dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie związku między  $h$  i  $x$  oraz jedną z wielkości: długością  $b$  ramienia, lub długością odcinka  $CE$ , lub długością odcinka  $CS$ , np.:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2, \quad \frac{r}{h-r} = \frac{\frac{1}{2}x}{b}, \quad \frac{1}{2}xh = r \cdot \left(\frac{1}{2}x + b\right),$$

ALBO

- zapisanie związku  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}x}$  (dla sposobu II),

ALBO

- zapisanie związku  $P = \left(b + \frac{x}{2}\right) \cdot r$  lub

$$P = \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}x\right)\left(b + \frac{1}{2}x - b\right)\left(b + \frac{1}{2}x - b\right)\left(b + \frac{1}{2}x - x\right)} \quad (\text{dla sposobu III}),$$

ALBO

- zapisanie związków  $P = \frac{1}{2}b^2 \sin(2\beta)$  oraz  $\sin \beta = \frac{r}{h-r}$ ,

ALBO

- zapisanie długości boków trójkąta  $ADC$  (lub trójkąta  $CES$ ) w zależności od  $x$  i  $h$  (dla sposobu IV),

ALBO

- zapisanie długości przyprostokątnych trójkątów  $ADC$  oraz  $CES$  w zależności od  $x$  i  $h$  (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

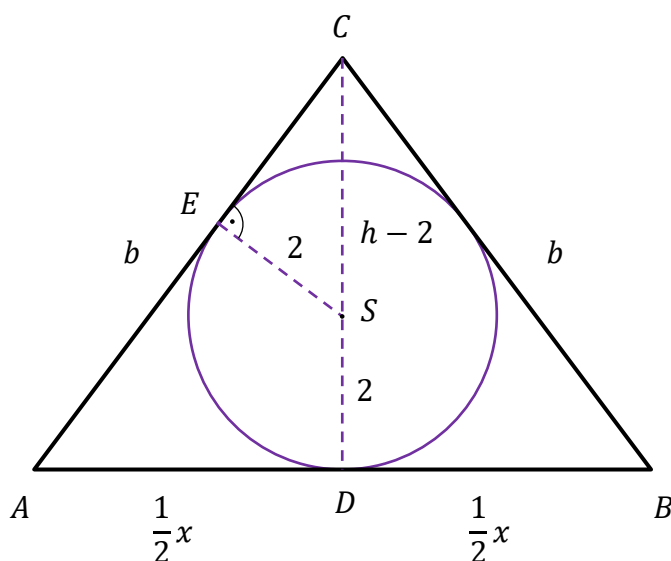
#### Uwaga:

Kategorie za 1 punkt oraz za 2 punkty oceniamy w sytuacji, gdy zdający posługuje się symbolem  $r$  albo przyjmie  $r = 2$  lub  $r = 4$ . Natomiast jeżeli zdający przyjmie promień inny niż 2 lub 4, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

##### Sposób I

Rozważmy trójkąt równoramienny  $ABC$  o podstawie  $AB$  długości  $x$  i wysokości  $CD$ , w który jest wpisany okrąg o promieniu  $r = 2$ . Niech  $S$  będzie środkiem tego okręgu, natomiast  $E$  – punktem styczności tego okręgu z ramieniem  $AC$ . Oznaczmy  $h = |CD|$  oraz  $b = |AC|$  (zobacz rysunek).



Korzystamy z podobieństwa trójkątów  $CES$  i  $CDA$ , otrzymując:

$$\frac{|SE|}{|CS|} = \frac{|AD|}{|AC|}$$

$$\frac{2}{h-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{b}$$

$$b = \frac{1}{4}x(h-2)$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta  $ADC$  dostajemy:

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2$$

$$\left(\frac{1}{4}xh - \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h^2 - \frac{1}{4}x^2h + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 + h^2$$

$$\frac{1}{16}x^2h - \frac{1}{4}x^2 = h$$

$$h\left(\frac{1}{16}x^2 - 1\right) = \frac{1}{4}x^2$$

$$h(x^2 - 16) = 4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

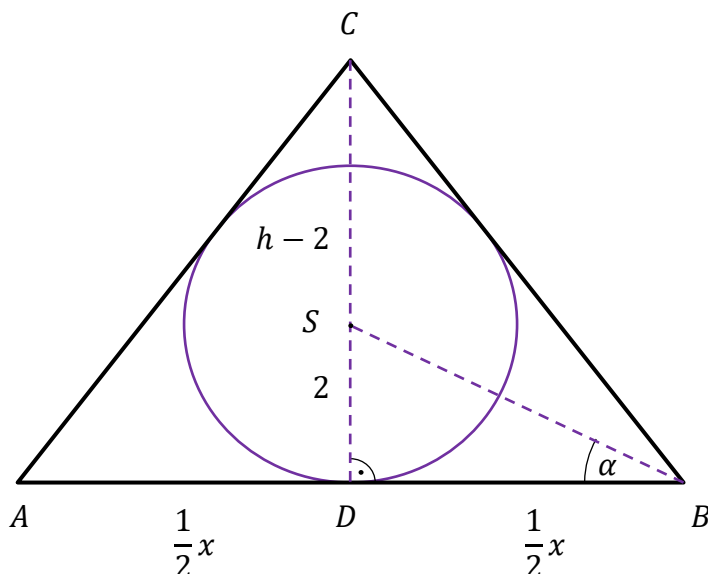
Wyznaczamy pole  $P$  trójkąta  $ABC$ :

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

### Sposób II

Rozważmy trójkąt równoramienny  $ABC$  o podstawie  $AB$  długości  $x$  i wysokości  $CD$ , w który jest wpisany okrąg o promieniu  $r = 2$ . Niech  $S$  będzie środkiem tego okręgu. Oznaczmy  $h = |CD|$  oraz  $\alpha = |\angle SBD|$  (zobacz rysunek).



Z trójkąta prostokątnego  $BSD$  otrzymujemy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{1}{2}x} = \frac{4}{x}$ .

Stąd i ze wzoru na tangens podwojonego kąta otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{4}{x}}{1 - \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \frac{8x}{x^2 - 16}$$

Punkt  $S$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ , więc prosta  $SB$  jest dwusieczną kąta  $CBD$ . Zatem  $\frac{h}{\frac{1}{2}x} = \operatorname{tg}(2\alpha)$ , czyli

$$h = \frac{1}{2}x \cdot \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

Wyznaczamy pole  $P$  trójkąta  $ABC$ :

$$P = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

### Sposób III

Rozważmy trójkąt równoramienny  $ABC$  o podstawie  $AB$  długości  $x$  i wysokości  $CD$ , w który jest wpisany okrąg o promieniu  $r = 2$ . Oznaczmy  $b = |AC|$  i niech  $p$  będzie połową obwodu tego trójkąta.

Wówczas  $p = \frac{b + b + x}{2} = b + \frac{1}{2}x$ . Stąd i ze wzoru  $P = p \cdot r$  otrzymujemy:

$$P = \left(b + \frac{1}{2}x\right) \cdot 2$$

$$b = \frac{P - x}{2}$$

Korzystamy ze wzoru Herona i otrzymujemy:

$$P = \sqrt{p(p-b)(p-b)(p-x)}$$

$$P = \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}x\right)\left(b + \frac{1}{2}x - b\right)\left(b + \frac{1}{2}x - b\right)\left(b + \frac{1}{2}x - x\right)}$$

$$P^2 = \left(b + \frac{1}{2}x\right)\left(b - \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

Stąd i ze związku  $b = \frac{P-x}{2}$  wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$ :

$$P^2 = \left(\frac{P-x}{2} + \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{P-x}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P^2 = \frac{1}{2}P \cdot \left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P - x\right) \cdot \frac{1}{4}x^2$$

$$P = \frac{1}{16}Px^2 - \frac{1}{8}x^3$$

$$16P = Px^2 - 2x^3$$

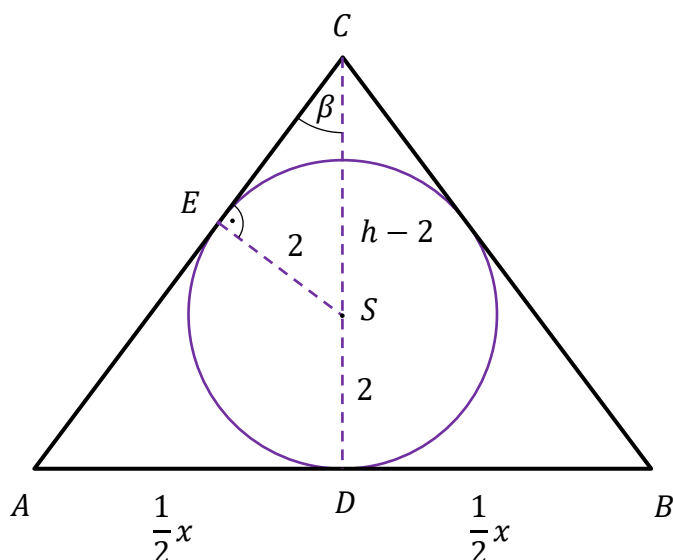
$$2x^3 = Px^2 - 16P$$

$$\frac{2x^3}{x^2 - 16} = P$$

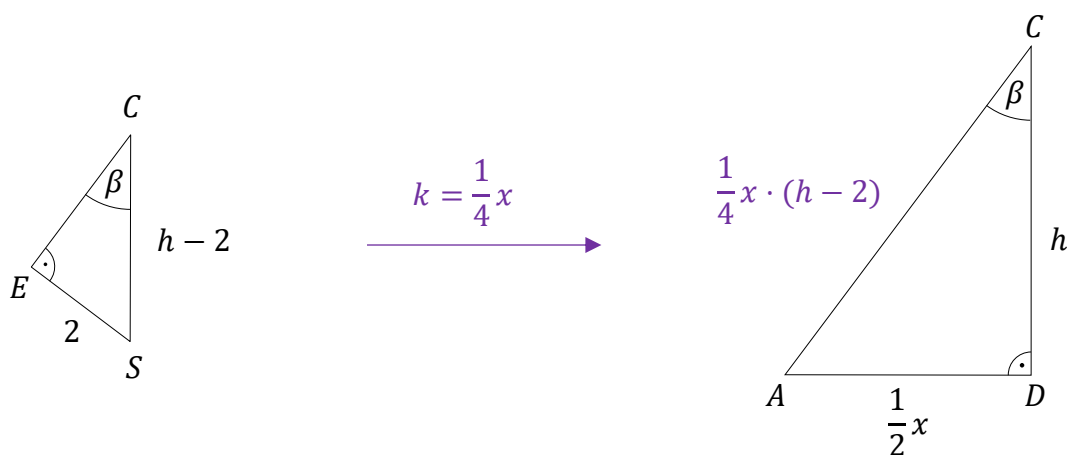
To należało wykazać.

#### Sposób IV

Rozważmy trójkąt równoramienny  $ABC$  o podstawie  $AB$  długości  $x$  i wysokości  $CD$ , w który jest wpisany okrąg o promieniu  $r = 2$ . Niech  $S$  będzie środkiem tego okręgu, natomiast  $E$  – punktem styczności tego okręgu z ramieniem  $AC$ . Oznaczmy  $h = |CD|$  oraz  $\beta = |\angle SCE|$  (zobacz rysunek).



Kąty w trójkątach  $ADC$  oraz  $SEC$  mają miary  $90^\circ$ ,  $\beta$  oraz  $90^\circ - \beta$ , więc te trójkąty są podobne na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Trójkąt  $ADC$  jest podobny do trójkąta  $SEC$  w skali  $k = \frac{\frac{1}{2}x}{2} = \frac{1}{4}x$ . Zatem  $|AC| = k \cdot |CS| = \frac{1}{4}x \cdot (h - 2)$  (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta  $ADC$  twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{4}x \cdot (h - 2) \right]^2 &= \left( \frac{1}{2}x \right)^2 + h^2 \\ \left( \frac{1}{4}xh - \frac{1}{2}x \right)^2 &= \left( \frac{1}{2}x \right)^2 + h^2 \\ \frac{1}{16}x^2h^2 - \frac{1}{4}x^2h + \frac{1}{4}x^2 &= \frac{1}{4}x^2 + h^2 \\ \frac{1}{16}x^2h - \frac{1}{4}x^2 &= h \\ h \left( \frac{1}{16}x^2 - 1 \right) &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

$$h(x^2 - 16) = 4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

Wyznaczamy pole  $P$  trójkąta  $ABC$ :

$$P = \frac{1}{2} xh = \frac{1}{2} x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

To należało wykazać.

#### Zadanie 12.2. (0–4)

| Wymaganie ogólne                                                                                                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Zdający:<br>XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...];<br>XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;<br>XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej. |

#### Zasady oceniania

- 4 pkt – uzasadnienie, że funkcja  $P$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $x = 4\sqrt{3}$  (m), **oraz** obliczenie pola trójkątnego klombu o takiej podstawie:  $P(4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$  (m<sup>2</sup>).
- 3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $P$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $x = 4\sqrt{3}$ .
- 2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $P$ :  $x = 4\sqrt{3}$ .
- 1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $P$ , np.  $P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Uwagi:

- Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
- a) Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji  $2x^3$  oraz  $x^2 - 16$  i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci  $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$  lub  $\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}$ , gdzie  $B$  jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale  $(4, 10]$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji  $P$ ).

- b) Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji  $2x^3$  lub  $x^2 - 16$  i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci  $\frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2}$  lub

$$\frac{B(x)}{(x^2 - 16)^2}, \text{ gdzie } B \text{ jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale } (4, 10]$$

ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji  $P$ ).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości  $x$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej

**ORAZ:**

– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji  $P$   
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $P$  ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,  
LUB

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $P$  ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „–”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).
5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{R}_+$ , lub w  $(4, +\infty)$ , lub w  $(0, 10]$ , to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja  $P$  określona wzorem  $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$

dla  $x \in (4, 10]$  osiąga wartość najmniejszą.

$$\text{Wyznaczamy pochodną funkcji } P: P'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2 - 16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 16)^2} = \frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2}$$

dla  $x \in (4, 10]$ .

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji  $P$ :

$$P'(x) = 0$$

$$\frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} = 0$$

$$2x^2(x^2 - 48) = 0$$

$$x = 0 \notin (4, 10] \vee x = -4\sqrt{3} \notin (4, 10] \vee x = 4\sqrt{3} \in (4, 10]$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(x) < 0$$

$$\frac{2x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} < 0 \wedge x \in (4, 10]$$

$$x^2(x^2 - 48) < 0 \wedge x \in (4, 10]$$

$$x^2 < 48 \wedge x \in (4, 10]$$

$$x \in (4, 4\sqrt{3})$$

więc  $P'(x) < 0$  dla  $x \in (4, 4\sqrt{3})$  oraz  $P'(x) > 0$  dla  $x \in (4\sqrt{3}, 10]$ .

Zatem funkcja  $P$  jest malejąca w przedziale  $(4, 4\sqrt{3}]$  i rosnąca w przedziale  $[4\sqrt{3}, 10]$ .

Stąd funkcja  $P$  osiąga wartość najmniejszą dla  $x = 4\sqrt{3}$  (m). Wtedy

$$P(4\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot (4\sqrt{3})^3}{(4\sqrt{3})^2 - 16} = 12\sqrt{3} \quad (m^2)$$

Uwaga.

Funkcja  $P$  jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto  $\lim_{x \rightarrow 4^+} P(x) = +\infty$  oraz

$\lim_{x \rightarrow 10^-} P(x) = \frac{500}{21}$ , więc uwzględniając wartość funkcji  $P$  w punkcie stacjonarnym

$x = 4\sqrt{3}$  równą  $P(4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$ , można sformułować wniosek, że funkcja  $P$  osiąga wartość najmniejszą równą  $12\sqrt{3}$  dla argumentu  $x = 4\sqrt{3}$ .