

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2019/2020**

**MATEMATYKA**

**POZIOM ROZSZERZONY**

**FORMUŁA OD 2015**

**(„NOWA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-R1A1P-203**

**CZERWIEC 2020**

## **Egzaminatorze!**

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

|               |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|
| Numer zadania | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Odpowiedź     | D | C | C | B |

### Klucz punktowania zadań kodowanych

#### Zadanie 5. (0–2)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego  $(a_n)$ , określonego dla  $n \geq 1$ , jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu  $(a_n)$ .

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

#### Przykładowe rozwiązanie

Suma wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa 2, zatem  $\frac{a_1}{1-q} = 2$ .

Suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  jest równa 3, a zatem  $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$ .

Stąd wynika, że  $7q^2 - 8q + 1 = 0$ .

Rozwiązaniami równania są  $q = \frac{1}{7}$  lub  $q = 1$ .

Rozwiązanie  $q = 1$  jest sprzeczne, ponieważ nie spełnia warunku zbieżności nieskończonego ciągu geometrycznego  $|q| < 1$ . Zatem  $q = \frac{1}{7} = 0,142857$ .

#### Zad 5.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|

#### Zadanie 6. (0–3)

Pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ , określonego dla  $n \geq 1$ , jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek  $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$ . Oblicz sumę  $a_1 + a_2 + a_3$ .

#### Rozwiązanie

Wyznaczamy kolejno wyrazy;

dla  $n = 1$  otrzymujemy:  $a_1 = 3 \cdot a_2 + 1$ , czyli  $a_2 = \frac{1}{3}$ ,

dla  $n = 2$  otrzymujemy:  $a_2 = 3 \cdot a_3 + 4$ , czyli  $a_3 = -\frac{11}{9}$ .

Stąd  $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$ .

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy obliczy drugi wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_2 = \frac{1}{3}$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy trzeci wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_3 = -\frac{11}{9}$

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy obliczy sumę  $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{10}{9}$ .

### **Zadanie 7. (0–3)**

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ . Wykaż, że jeżeli  $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$ , to  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$ .

#### **Przykładowe sposoby rozwiązania zadania**

##### **I sposób**

Niech  $a = |AB|$ ,  $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ ,  $r_1$  – promień okręgu opisanego na trójkącie  $ACB$ ,  
 $r_2$  – promień okręgu opisanego na trójkącie  $ADB$ .

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta  $ACB$  i dla trójkąta  $ADC$  wynika, że

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ADB} = 2r_2,$$

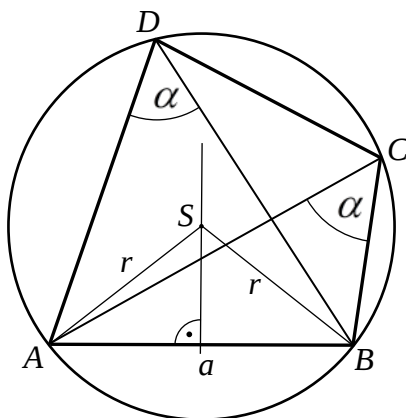
czyli

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r_2.$$

Stąd wynika, że  $r_1 = r_2$ .

Ponieważ odcinek  $AB$  jest wspólnym bokiem trójkątów  $ACB$  i  $ADB$ , więc środki okręgów opisanych na tych trójkątach leżą na symetralnej tego boku. Z faktu, że czworokąt  $ABCD$  jest wypukły, wynika natomiast, że punkty  $C$  i  $D$  leżą po tej samej stronie prostej  $AB$ .

Stąd i z równości  $r_1 = r_2$  wynika, że środki obu tych okręgów pokrywają się, co oznacza, że okrąg opisany na trójkącie  $ACB$  jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie  $ADB$ .



Jest to więc okrąg opisany na czworokącie  $ABCD$ . Kąty  $BAC$  i  $BDC$  są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku  $BC$ . To kończy dowód.

#### Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....1 pkt**

Zdający wykaże, że promienie okręgów opisanych na trójkątach  $ACB$  i  $ADB$  są równe.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt**

Zdający uzasadni, że na czworokącie  $ABCD$  można opisać okrąg.

#### Uwaga

Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach  $ACB$  i  $ADB$  są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach  $ACB$  i  $ADB$  pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

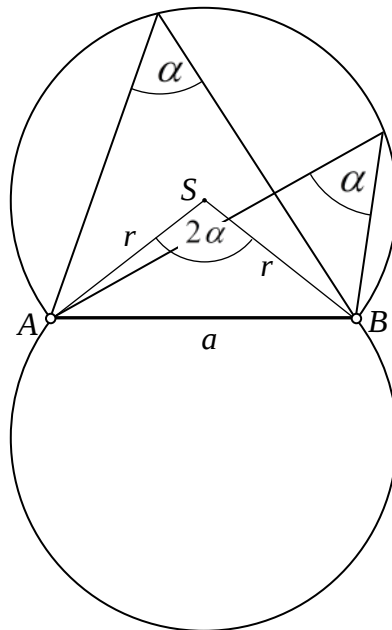
**Rozwiązanie pełne .....3 pkt**

Zdający uzasadni, że kąty  $BAC$  i  $BDC$  są równe.

#### **II sposób**

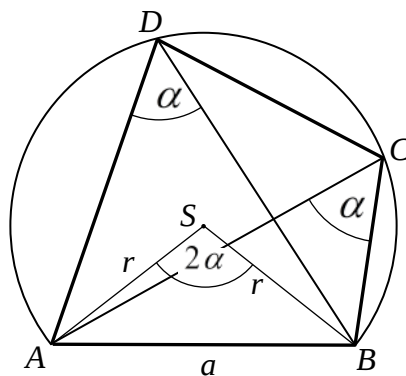
Miejscem geometrycznym punktów, z których odcinek  $AB$  widać pod tym samym kątem

$\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ , jest suma łuków (bez końców)  $\widehat{AB}$  okręgów, których ten odcinek jest wspólną cięciwą, przy czym łuk leżący po jednej stronie prostej  $AB$  jest symetryczny do łuku leżącego po drugiej stronie tej prostej.



Wierzchołki  $C$  i  $D$  czworokąta  $ABCD$  leżą na jednym z tych łuków, gdyż czworokąt ten jest wypukły.

Oznacza to, że na czworokącie  $ABCD$  można opisać okrąg.



Kąty  $BAC$  i  $BDC$  są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku  $BC$ . To kończy dowód.

### Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt**

Zdający uzasadni, że na czworokącie  $ABCD$  można opisać okrąg, odwołując się do miejsca geometrycznego punktów, z których odcinek  $AB$  widać pod tym samym kątem

$$\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|.$$

#### Uwaga

Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach  $ACB$  i  $ADB$  są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach  $ACB$  i  $ADB$  pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie pełne .....3 pkt**

Zdający uzasadni, że kąty  $BAC$  i  $BDC$  są równe .

### **Zadanie 8. (0–3)**

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej  $n$  wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 3$  jest podzielne przez 16.

#### **Rozwiązanie (I sposób)**

Przekształcamy wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 3$  równoważnie w następujący sposób

$$n^4 \cdot (n - 3) - (n - 3)$$

$$(n^4 - 1) \cdot (n - 3)$$

$$(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3)$$

$$(n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3)$$

Liczba  $n$  jest nieparzysta więc liczby  $(n - 1)$ ,  $(n + 1)$ ,  $(n^2 + 1)$ ,  $(n - 3)$  są parzyste zatem ich iloczyn jest podzielny przez  $2^4$ . Wyrażenie jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16 więc jest podzielne przez 16.

#### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze wyrażenie w postaci:  $(n^4 - 1) \cdot (n - 3) + 16$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci:  $(n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n - 3) + 16$  i nie uzasadni podzielności przez 16.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

#### **Rozwiązanie (II sposób)**

Ponieważ liczba  $n$  jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci  $2k + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

Wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 3$  przyjmuje postać:

$$(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 3.$$

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy

$$32n^5 + 32n^4 - 16n^3 - 32n^2 - 16n + 16,$$

stąd wyrażenie możemy zapisać w postaci iloczynu  $16(2n^5 + 2n^4 - n^3 - 2n^2 - n + 1)$ , który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby  $(2n^5 + 2n^4 - n^3 - 2n^2 - n + 1)$  jest podzielny przez 16.

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie  $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$  i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażeń.

$$(2k+1)^5 = 32n^5 + 80n^4 + 80n^3 + 40n^2 + 10n + 1 \text{ lub}$$

$$(2k+1)^4 = 16n^4 + 32n^3 + 24n^2 + 8n + 1.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci  $32n^5 + 32n^4 - 16n^3 - 32n^2 - 16n + 16$  i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

### **Zadanie 9. (0–4)**

Rozwiąż równanie  $4\sin^3 x + \sin 2x = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$ .

#### **Rozwiązanie (I sposób)**

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x + 2\sin x \cos x = 4\sin^2 x \cos x + 2\sin^2 x$$

$$4\sin^3 x + 2\sin x \cos x - 4\sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x (2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x \cos x - \sin x) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin x (\sin x - \cos x) + \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } (\sin x - \cos x)(2\sin x - 1) = 0$$

Zatem

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = \cos x \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}$$

Zauważmy, że drugie równanie tej alternatywy jest równoważne równaniu  $\operatorname{tg} x = 1$ .

Gdyby zachodziło  $\cos x = 0$ , to otrzymalibyśmy równość  $\sin x = 0$ , a to byłoby sprzeczne z tożsamością  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Ostatecznie zapisujemy cztery serie rozwiązań podanego równania:

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę całkowitą.}$$

#### **Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania**

.....1p.  
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2 \sin x (2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

#### **Rozwiązanie, w którym jest istotny**

**postępowanie**.....2p.

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu

$$(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x)(2 \sin x - 1) = 0 \text{ lub } (2 \sin^2 x - \sin 2x)(2 \sin x - 1) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

#### **Pokonanie zasadniczych trudności**

**zadania**.....3p.

Zdający poprawnie rozwiąże dwa spośród trzech równań:

$$\sin x = 0, \quad 2 \sin x - 1 = 0, \quad \sin x - \cos x = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

#### **Rozwiązanie**

**pełne**.....4p.

Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę}$$

całkowitą.

#### **Rozwiązanie (II sposób)**

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x = 4 \sin^2 x \cos x + 2 \sin^2 x$$

$$4 \sin^3 x + 2 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin x (2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

Równanie  $2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$  zapisujemy w postaci

$$2 \sin^2 x - (2 \cos x + 1) \sin x + \cos x = 0$$

i rozwiązujemy je tak samo jak równanie kwadratowe z niewiadomą  $\sin x$  i parametrem  $\cos x$ .

Otrzymujemy wtedy wyróżnik  $\Delta = (2 \cos x - 1)^2$  oraz dwa rozwiązania:

$$\sin x = \frac{2 \cos x + 1 - |2 \cos x - 1|}{4} \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{2 \cos x + 1 + |2 \cos x - 1|}{4}$$

Jeśli  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ , to otrzymujemy rozwiązania  $\sin x = \frac{1}{2}$  lub  $\sin x = \cos x$ . Zatem w tym przypadku

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Jeśli zaś  $\cos x < \frac{1}{2}$ , to otrzymujemy rozwiązania  $\sin x = \cos x$  lub  $\sin x = \frac{1}{2}$ . W tym przypadku

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi.$$

Ostatecznie możemy zapisać cztery serie rozwiązań podanego równania:

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \text{ oznacza liczbę całkowitą.}$$

### **Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania**

.....1p.

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2 \sin x (2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny**

**postęp**..... 2p.

Zdający zapisze równanie  $2 \sin^2 x + \cos x - 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$  w postaci

$$2 \sin^2 x - (2 \cos x + 1) \sin x + \cos x = 0,$$

obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego z lewej strony równania  $\Delta = (2 \cos x - 1)^2$  i zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\sin x = \frac{2 \cos x + 1 - |2 \cos x - 1|}{4} \quad \text{lub} \quad \sin x = \frac{2 \cos x + 1 + |2 \cos x - 1|}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności**

**zadania.....3p.**

Zdający rozpatrzy poprawnie jeden z przypadków:

- jeśli  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ , to  $\sin x = \frac{1}{2}$  lub  $\sin x = \cos x$ .

Zatem w tym przypadku  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

**albo**

- jeśli zaś  $\cos x < \frac{1}{2}$ , to  $\sin x = \cos x$  lub  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Zatem w tym przypadku  $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$  lub  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ .

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie**

**pełne.....4p.**

Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \text{ oznacza liczbę}$$

całkowitą.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez  $\sin x$  **lub** przez  $(2 \sin x - 1)$ , bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki  $\sin x = 0$  oraz  $2 \sin x - 1 = 0$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez  $\sin x$  **i** przez  $(2 \sin x - 1)$ , bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki  $\sin x = 0$  oraz  $2 \sin x - 1 = 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniach nie uwzględni okresowości funkcji trygonometrycznych i zapisuje przykładowe rozwiązania z każdej serii, np.  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu fałszywe równości, np.  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**, o ile wcześniej nie nabył praw do **3 punktów**.
5. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu równość  $\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$ , bez odpowiedniego komentarza, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podczas doprowadzania równania do postaci iloczynu stosuje nieistniejące „wzory” skróconego mnożenia, np.

$$(a - b - c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \text{ lub } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2),$$

to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile wcześniej nie nabył praw do **1 punktu**.

**Zadanie 10. (0–4)**

Dla pewnych liczb rzeczywistych  $a > 1$ ,  $b > 1$  i  $N > 1$  jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia  $\log_a b$ .

**Rozwiązanie**

Wprowadzamy jednakową podstawę  $a$  dla logarytmów i otrzymujemy:

$$\frac{20 \log_a N}{\log_a (a^2b)} = 3 \left( \log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b} \right)$$

Ponieważ  $\log_a N \neq 0$ , więc powyższa równość jest równoważna równości

$$\frac{20}{2 + \log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

Zapisujemy zatem kolejno:

$$\begin{aligned} 20 \log_a b &= 3 \log_a b (2 + \log_a b) + 3(2 + \log_a b) \\ 3(\log_a b)^2 - 11 \log_a b + 6 &= 0. \end{aligned}$$

To równanie ma dwa rozwiązania  $\log_a b = 3$  lub  $\log_a b = \frac{2}{3}$ , będące poszukiwanymi wartościami wyrażenia  $\log_a b$ .

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania**

.....1p.

Zdający zapisze podaną równość w postaci  $\frac{20 \log_a N}{\log_a (a^2b)} = 3 \left( \log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b} \right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp**

.....2p.

Zdający zapisze równanie wymierne z niewiadomą  $\log_a b$ .

$$\frac{20}{2 + \log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności**

**zadania.....3p.**

Zdający przekształci powyższe równanie do postaci równania kwadratowego, np.

$$20 \log_a b = 3 \log_a b (2 + \log_a b) + 3(2 + \log_a b)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie**

**pełne.....4p.**

Zdający rozwiąże powyższe równanie i zapisze, że szukane wyrażenie przyjmuje dwie wartości:

$$\log_a b = 3 \text{ lub } \log_a b = \frac{2}{3}.$$

**Uwagi:**

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $\log_b a = \frac{3}{2}$  lub  $\log_b a = \frac{1}{3}$ .
2. Jeśli zdający pominie kwadrat w wyrażeniu  $\log_{a^2b} N$  i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, otrzymując odpowiedź:  $\log_a b = \frac{19}{3}$ , to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający korzysta w rozwiązaniu z fałszywych równości, np.  $\log_{a^2b} N = \frac{1}{2} \log_{ab} N$ , to otrzymuje **0 punktów**, chyba że wcześniej nabył praw do 1 punktu.

### Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których nierówność

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

#### Rozwiązanie

Zapiszemy nierówność w następującej postaci

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x(1 - m) + 2 > 0$$

Zauważamy, że  $m^2 + 4m - 5 = (m - 1)(m + 5)$ . Wynika stąd, że należy rozważyć dwie sytuacje:

- nierówność liniowa
  - 1) Jeśli  $m = 1$ , to otrzymujemy nierówność  $2 > 0$ , która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .
  - 2) Jeśli  $m = -5$ , to otrzymujemy nierówność  $12x + 2 > 0$ , która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x > -\frac{1}{6}$ .
- nierówność kwadratowa
  - 3) Jeśli  $m \neq 1$  i  $m \neq -5$ , to należy sprawdzić, kiedy zachodzą jednocześnie dwie nierówności:

$$a > 0 \text{ i } \Delta < 0,$$

gdzie  $a = (m - 1)(m + 5)$  jest współczynnikiem trójmianu

$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x(1 - m) + 2$  przy najwyższej potędze zmiennej  $x$ , zaś

$\Delta = b^2 - 4ac$  jest wyróżnikiem tego trójmianu. Zapisujemy kolejno:

$$(m - 1)(m + 5) > 0 \Leftrightarrow m < -5 \text{ lub } m > 1.$$

$$\Delta = 4(1 - m)^2 - 4(m - 1)(m + 5) \cdot 2 = 4(m - 1)^2 - 8(m - 1)(m + 5) = -4(m - 1)(m + 11)$$

$$-4(m - 1)(m + 11) < 0 \Leftrightarrow m < -11 \text{ lub } m > 1.$$

Zatem nierówności  $a > 0$  i  $\Delta < 0$  zachodzą jednocześnie dla  $m < -11$  lub  $m > 1$ .

Łącząc wyniki z punktów 1) i 3), otrzymujemy odpowiedź ostateczną:  $m < -11$  lub  $m \geq 1$ .

#### Schemat punktowania

Składa się on z dwóch części.

**Pierwsza**, to rozpatrzenie przypadku nierówności liniowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

**Druga**, to rozpatrzenie przypadku nierówności kwadratowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

#### Schemat punktowania części pierwszej

**1 punkt** przyznajemy zdającemu, który zauważy i zapisze, że dla  $m = 1$  albo dla  $m = -5$  podana nierówność jest liniowa i poprawnie zbada jeden z tych przypadków.

**2 punkty** przyznajemy zdającemu, który poprawnie określi, że dla  $m = 1$  nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , zaś dla  $m = -5$  tak nie jest.

### Schemat punktowania części drugiej

**1 punkt** przyznajemy zdającemu, który zapisze, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wtedy, gdy parametr  $m$  spełnia układ nierówności

$$m^2 + 4m - 5 > 0 \text{ i } \Delta < 0$$

albo

$$m^2 + 4m - 5 > 0 \text{ i } y_W > 0, \text{ gdzie } y_W = -\frac{\Delta}{4a}$$

**2 punkty** przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże jedną z dwóch nierówności

$$m^2 + 4m - 5 > 0, \text{ czyli } (m-1)(m+5) > 0 \Leftrightarrow m < -5 \text{ lub } m > 1$$

lub

$$\Delta = -4(m-1)(m+11) < 0$$

$$-4(m-1)(m+11) < 0 \Leftrightarrow m < -11 \text{ lub } m > 1$$

**3 punkty** przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże obie nierówności  $a > 0$  i  $\Delta < 0$

**oraz**

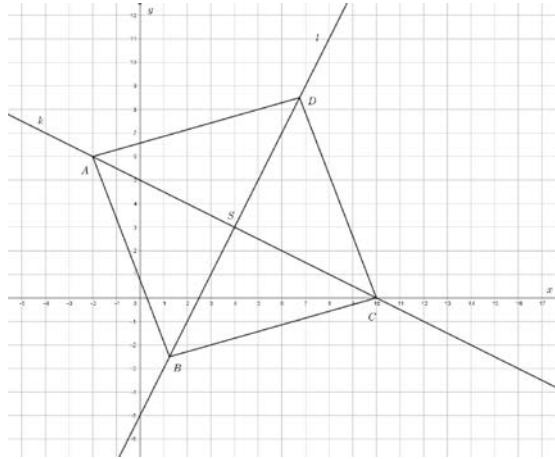
zapisze końcową odpowiedź do zadania: Dla  $m < -11$  lub  $m \geq 1$  podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

### Uwagi:

1. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze jedynie nierówność  $\Delta < 0$  i nawet bezbłędnie tę nierówność rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisze w drugiej części rozwiązania układ nierówności  $m^2 + 4m - 5 \neq 0$  i  $\Delta < 0$ , a następnie konsekwentnie rozwiąże ten układ do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
3. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze układ nierówności  $m^2 + 4m - 5 > 0$  i  $\Delta > 0$ , a następnie nawet bezbłędnie ten układ rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.  
Jeśli zdający zapisze w części drugiej rozwiązania układ nierówności  $m^2 + 4m - 5 > 0$  i  $\Delta \leq 0$ , i konsekwentnie rozwiąże tę część do końca, to za tę część może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

**Zadanie 12. (0–6)**

Punkt  $A = (-2, 6)$  jest wierzchołkiem rombu  $ABCD$  o polu  $82,5$ . Przekątna  $BD$  zawiera się w prostej  $l$  o równaniu  $2x - y - 5 = 0$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.



**Rozwiązanie (I sposób)**

Wyznaczamy równanie prostej  $k$  zawierającej przekątną  $AC$  rombu (prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $l$ , punkt  $A$  leży na prostej  $k$ ).

$$k : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Z układu równań  $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$  wyznaczamy współrzędne punktu  $S = (4, 3)$  (środek

symetrii rombu). Punkt  $S$  jest jednocześnie środkiem przekątnej  $AC$ , co pozwala obliczyć współrzędne wierzchołka  $C = (10, 0)$ .

Obliczamy długość przekątnej  $|AC| = 6\sqrt{5}$ , a następnie, wykorzystując informację o polu rombu, obliczamy długość drugiej przekątnej.

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = 82,5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BD| = 82,5$$

$$|BD| = \frac{11}{2}\sqrt{5}$$

Punkty  $B$  oraz  $D$  leżą na okręgu o środku  $S = (4, 3)$  i promieniu  $\frac{1}{2}|BD| = \frac{11}{4}\sqrt{5}$  oraz na prostej  $l$ . Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = \frac{121}{16} \cdot 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

Otrzymujemy punkty  $B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$  oraz  $D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$ .

**Uwaga**

Długość odcinka AS można obliczyć również jako odległość punktu A od prostej  $l$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- wyznaczy równanie prostej

$$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

albo

- wyznaczy  $|AS| = 3\sqrt{5}$ , jako odległość punktu A od prostej  $l$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy

- wyznaczy równanie prostej  $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$  oraz obliczy współrzędne punktów

$$S = (4, 3) \text{ oraz } C = (10, 0)$$

albo

- wyznaczy  $|AS| = 3\sqrt{5}$ , jako odległość punktu A od prostej  $l$  oraz obliczy długości przekątnych  $|AC| = 6\sqrt{5}$  oraz  $|BD| = \frac{11}{2}\sqrt{5}$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy wyznaczy równanie prostej  $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$  oraz obliczy współrzędne punktów

$$S = (4, 3) \text{ oraz } C = (10, 0) \text{ i długość przekątnej } |BD| = \frac{11}{2}\sqrt{5}.$$

**Zdający otrzymuje ..... 4 p.**

gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów  $B$  oraz  $D$ ,

$$\text{np. } \begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = \frac{121}{16} \cdot 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

**Zdający otrzymuje ..... 5 p.**

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

**Zdający otrzymuje ..... 6 p.**

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$$B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right), C = (10, 0), D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right).$$

### Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczamy równanie prostej  $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$  oraz obliczamy współrzędne punktu

$C = (10, 0)$  (jak w sposobie I). Zauważamy, że pole trójkąta  $ABC$  jest połową pola rombu  $ABCD$  i wynosi  $41\frac{1}{4}$ . Wyznaczamy pole trójkąta  $ABC$  w zależności od współrzędnych punktu

$$B = (x_B, y_B)$$

$$P_{\triangle ABC} = |-6y_B - 3x_B + 30|$$

Punkt  $B$  leży na prostej  $l$ , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4} \\ y_B = 2x_B - 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb  $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$  oraz  $\left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$ . Zauważamy, że takie

same warunki spełnia punkt  $D$  (pole trójkąta  $ABD$  jest połową pola rombu oraz punkt  $D$  leży na prostej  $l$ ). Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków  $B$  oraz  $D$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy wyznaczy równanie prostej

$$k : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy

wyznaczy równanie prostej  $k : y = -\frac{1}{2}x + 5$  oraz obliczy współrzędne punktów  $S = (4, 3)$

i  $C = (10, 0)$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy zauważy, że pole trójkąta  $ABC$  jest połową pola rombu  $ABCD$  i wynosi  $41\frac{1}{4}$  i zapisze

$$\text{równanie } |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4}$$

**Zdający otrzymuje ..... 4 p.**

gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów  $B$  oraz  $D$

$$\begin{cases} |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4} \\ y_B = 2x_B - 5 \end{cases}$$

**Zdający otrzymuje ..... 5 p.**

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

**Zdający otrzymuje ..... 6 p.**

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$$B = \left(1\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}\right), C = (10, 0), D = \left(6\frac{3}{4}, 8\frac{1}{2}\right).$$

### **Rozwiązanie (III sposób)**

Przyjmijmy oznaczenie współrzędnych punktu  $C = (x_C, y_C)$ . Wyznaczamy współrzędne wektora  $\overrightarrow{AC} = [x_C + 2, y_C - 6]$ .

Wektor  $\overrightarrow{AC}$  jest prostopadły do prostej  $2x - y - 5 = 0$  Istnieje zatem  $p \in \mathbb{R}$ , dla którego

$$\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$$

Obliczamy długość wektora  $\overrightarrow{AC}$  jako podwojoną odległość punktu  $A$  od prostej  $l$ .

$$|\overrightarrow{AC}| = 6\sqrt{5}$$

Wtedy  $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$  stąd  $p = 6$  lub  $p = -6$ .

Zatem

$$[x_C + 2, y_C - 6] = [12, -6] \text{ lub } [x_C + 2, y_C - 6] = [-12, 6]$$

$$C_1 = (10, 0), \quad C_2 = (-14, 12)$$

Odrzucamy drugie rozwiązanie (np. na podstawie obserwacji, że środek odcinka  $AC_2$  nie leży na prostej  $l$ . Dalej postępujemy, jak w I lub II sposobie.

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze  $\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$ ,  $\overrightarrow{AC} = [x_c + 2, y_c - 6]$  oraz obliczy  $\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{5}$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy rozwiąże równanie  $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$ , wyznaczy współrzędne punktu

$C_1 = (10, 0)$  i uzasadni odrzucenie drugiego rozwiązania.

Dalszą część rozwiązania oceniamy jak w sposobie I lub II.

### **Zadanie 13. (0–3)**

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

#### **Rozwiązanie**

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka.

Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki.

Stosujemy regułę mnożenia:  $7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$ .

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki.

Stosujemy kolejny raz regułę mnożenia:  $7 \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$ .

Teraz stosujemy regułę dodawania:  $42 + 105 = 147$ .

Jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

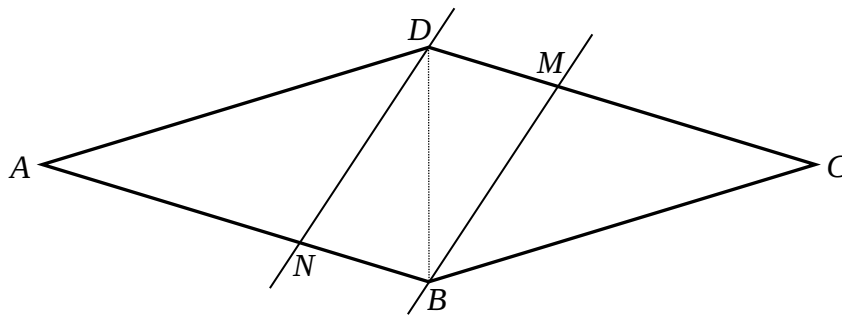
gdy obliczy ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka lub zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka: odpowiednio 42 i 105.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

### **Zadanie 14. (0–6)**

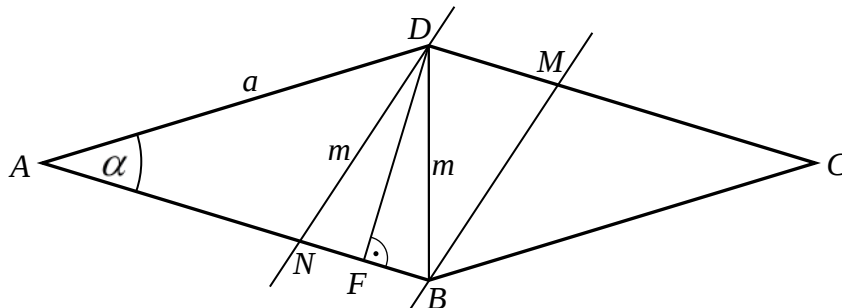
Dany jest romb  $ABCD$ . Przez wierzchołki  $B$  i  $D$  poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki  $CD$  i  $AB$  – odpowiednio – w punktach  $M$  i  $N$ , tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury  $AND$ ,  $NBMD$ ,  $BCM$  o równych polach oraz  $|MB| = |ND| = |BD|$  (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.



### **Przykładowe sposoby rozwiązania zadania**

#### **I sposób**

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna  $BD$  dzieli romb  $ABCD$  na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok  $BMDN$  na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta  $AND$ , więc pole trójkąta  $AND$  jest dwa razy większe od pola trójkąta  $BDN$ . Trójkąty  $AND$  i  $BDN$  mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka  $D$ , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem  $|NB| = \frac{a}{3}.$

Trójkąt  $NBD$  jest równoramienny, więc spodek  $F$  jego wysokości  $DF$  jest środkiem podstawy  $NB$ . Stąd wynika, że  $|FB| = \frac{a}{6}$ , więc  $|AF| = a - \frac{a}{6} = \frac{5}{6}a$ .

Z trójkąta prostokątnego  $AFD$  otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\frac{5}{6}a}{a} = \frac{5}{6}.$$

### Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów  $AND$  i  $BDN$  jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej  $AB$

albo

- zaznaczy wysokość  $DF$  trójkąta  $NBD$  i zapisze, że odcinki  $NF$  i  $FB$  są równe

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka  $AN$  (lub  $NB$ ) w zależności od długości boku rombu:  $P_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$  i  $P_{AND} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha$   
i  $P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$ , gdzie  $x = |AN|$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka  $AN$  (lub  $NB$ ) w zależności od długości boku rombu:

$$|AN| = \frac{2}{3}a \quad (|NB| = \frac{1}{3}a).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka  $FB$  w zależności od długości boku rombu lub wykorzysta

definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym  $AFD$ :  $|FB| = \frac{1}{6}a$  lub  $\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka  $FB$  w zależności od długości boku rombu i wykorzysta

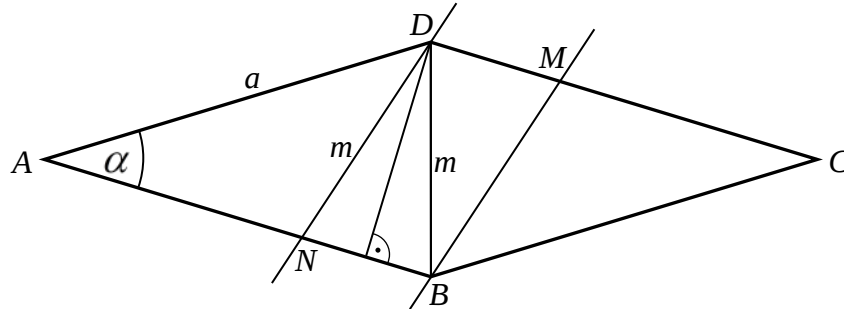
definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym  $AFD$ :  $|FB| = \frac{1}{6}a$  i  $\cos \alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$ .

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt  
Rozwiązanie pełne .....6 pkt

Zdający obliczy  $\cos \alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ .

## II sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna  $BD$  dzieli romb  $ABCD$  na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok  $BMDN$  na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta  $AND$ , więc pole trójkąta  $AND$  jest dwa razy większe od pola trójkąta  $BDN$ . Trójkąty  $AND$  i  $BDN$  mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka  $D$ , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem  $|AN| = \frac{2}{3}a$ .

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów  $ABD$  i  $AND$  otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos \alpha \text{ oraz } |ND|^2 = |AN|^2 + |AD|^2 - 2|AN| \cdot |AD| \cos \alpha,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha \text{ oraz } m^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot a \cos \alpha,$$

$$m^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha) \text{ oraz } m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right).$$

Stąd

$$a^2(2 - 2\cos \alpha) = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right),$$

$$2 - 2\cos \alpha = \frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha,$$

$$\frac{2}{3}\cos \alpha = \frac{5}{9},$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

### **Uwaga**

Obliczenie, jaką częścią boku rombu jest odcinek  $AN$ , możemy też wykonać, korzystając ze wzoru na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ . Niech  $|AN| = x$ . Wtedy pole rombu  $ABCD$  jest równe

$$P_{ABCD} = a^2 \sin \alpha,$$

a pole trójkąta  $AND$  jest równe

$$P_{AND} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha.$$

Pole trójkąta  $AND$  to jedna trzecia pola rombu, więc

$$\frac{1}{2}ax \sin \alpha = \frac{1}{3}a^2 \sin \alpha.$$

Stąd

$$x = \frac{2}{3}a.$$

### **Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów  $AND$  i  $BDN$  jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej  $AB$

albo

- zapisze dwa równania wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkątów  $ABD$  i  $AND$ :  $m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha$ ,  $m^2 = x^2 + a^2 - 2 \cdot x \cdot a \cos \alpha$ , gdzie  $x = |AN|$

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka  $AN$  w zależności od długości boku rombu:  $P_{ABCD} = a^2 \sin \alpha$  i  $P_{AND} = \frac{1}{2}ax \sin \alpha$  i  $P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka  $AN$  (lub  $NB$ ) w zależności od długości boku rombu:

$$|AN| = \frac{2}{3}a \quad (|NB| = \frac{1}{3}a).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający zapisze jedno z równań, które pozwala obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:

$$m^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha) \quad \text{lub} \quad m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt**

Zdający zapisze układ równań, pozwalający obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:

$$m^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha) \quad \text{oraz} \quad m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos \alpha\right).$$

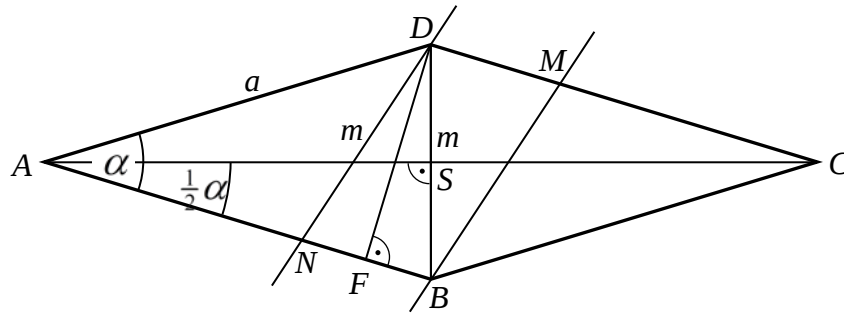
**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt**

**Rozwiązanie pełne .....6 pkt**

Zdający obliczy  $\cos \alpha$  :  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ .

### III sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna  $BD$  dzieli równoległobok  $BMDN$  na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta  $NBD$  jest szóstą częścią pola rombu. Trójkąt  $NBD$  jest równoramienny, więc jego wysokość  $DF$  dzieli go na dwa trójkąty przystające. Zatem pole trójkąta  $FBD$  jest dwunastą częścią pola rombu.

Przekątne rombu dzielą go na cztery trójkąty przystające, więc pole trójkąta  $SBA$  jest czwartą częścią pola rombu.

Zauważmy teraz, że trójkąty  $FBD$  i  $SBA$  są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $B$ . Skala  $s$  tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2 = \frac{P_{FBD}}{P_{SBA}} = \frac{\frac{1}{12} P_{ABCD}}{\frac{1}{4} P_{ABCD}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$m^2 = \frac{1}{3} a^2.$$

$$\text{Stąd } m = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Z trójkąta  $SBA$  otrzymujemy

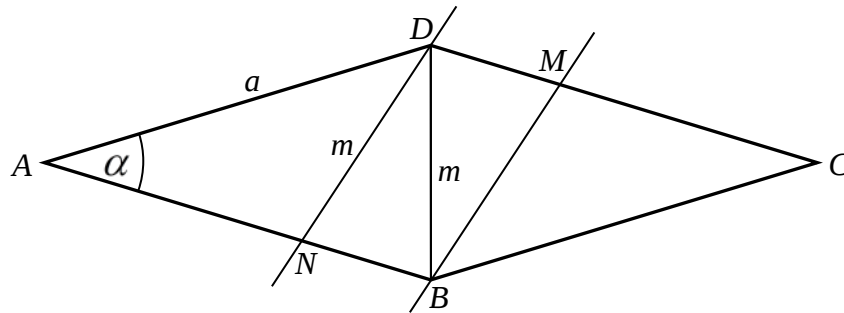
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2} m}{a} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta mamy więc

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{12} = \frac{5}{6}.$$

#### IV sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna  $BD$  dzieli równoległobok  $BMDN$  na dwa trójkąty o równych polach oraz romb  $ABCD$  na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta  $NBD$  jest trzecią częścią pola trójkąta  $BDA$ . Trójkąty  $NBD$  i  $BDA$  są równoramienne i mają ten sam kąt przy wierzchołku  $B$ , a jest to kąt przy podstawie każdego z tych trójkątów, więc trójkąty te są podobne. Skala  $s$  tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2 = \frac{P_{NBD}}{P_{BDA}} = \frac{\frac{1}{3}P_{BDA}}{P_{BDA}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$m^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BDA$  otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cos \alpha,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha,$$

$$\frac{1}{3}a^2 = a^2(2 - 2\cos \alpha),$$

$$\frac{1}{3} = 2 - 2\cos \alpha,$$

$$2\cos \alpha = \frac{5}{3},$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

**Schemat punktowania III i IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zdający

- zapisze, że pole trójkąta  $FBD$  jest dwunastą częścią pola rombu  $ABCD$

albo

- zapisze, że pole trójkąta  $SBA$  jest czwartą częścią pola rombu  $ABCD$

albo

- zapisze, że pole trójkąta  $NBD$  jest trzecią częścią pola trójkąta  $BDA$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zdający

- zapisze, że trójkąty  $FBD$  i  $SBA$  są podobne i  $P_{FBD} = \frac{1}{12} P_{ABCD}$ , i  $P_{SBA} = \frac{1}{4} P_{ABCD}$

albo

- zapisze, że trójkąty  $NBD$  i  $BDA$  są podobne i  $P_{NBD} = \frac{1}{3} P_{BDA}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi  $m, a, \cos \alpha$ , np.:

$$m^2 = \frac{1}{3} a^2 \text{ i } m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha$$

lub

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta  $\frac{\alpha}{2}$ , np.:  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....4 pkt**

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi  $m, a, \cos \alpha$ , np.:

$$m^2 = \frac{1}{3} a^2 \text{ i } m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos \alpha$$

oraz

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta  $\frac{\alpha}{2}$ , np.:  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .....5 pkt**

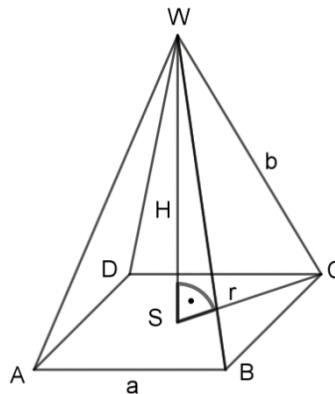
**Rozwiązanie pełne .....6 pkt**

Zdający obliczy  $\cos \alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ .

### Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa  $d$ . Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

#### Rozwiązanie (I sposób)



Wprowadzamy oznaczenia:  $r$  – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa,  $b$  – krawędź boczna,  $a$  – krawędź podstawy,  $H$  – wysokość ostrosłupa.

Z zależności  $r + b = d$  wyznaczamy  $b = d - r$ . W trójkącie  $SCW$  stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2 = b^2 - r^2 = (b - r)(b + r) = d(b - r) = d(d - r - r) = d(d - 2r)$$

skąd wyznaczamy  $H = \sqrt{d(d - 2r)}$ .

Zauważamy, że  $r > 0$  oraz  $d - 2r > 0$ , czyli  $r \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$ .

Wyznaczamy  $a$  w zależności od  $r$ :  $a = r\sqrt{2}$  i zapisujemy objętość ostrosłupa w zależności od zmiennej  $r$ .

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2 \cdot 2\sqrt{d^2 - 2dr} = \frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2 - 2r^5d} \quad \text{dla } r \in \left(0, \frac{d}{2}\right).$$

Rozważamy funkcję pomocniczą  $f(r) = r^4d^2 - 2r^5d$ , której dziedziną jest przedział  $\left(0, \frac{d}{2}\right)$ .

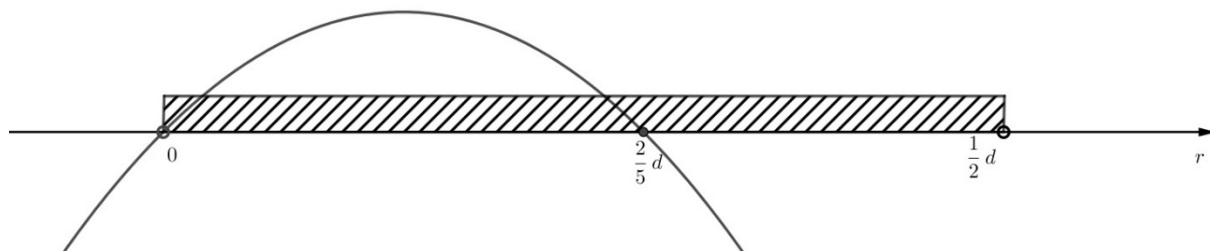
Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$$f'(r) = 4r^3d^2 - 10r^4d = 2r^3d(2d - 5r)$$

Jedynym miejscem zerowym z przedziału  $\left(0, \frac{d}{2}\right)$  jest  $r = \frac{2}{5}d$

( $r = 0$  nie należy do dziedziny funkcji  $f$ ).

Analizujemy monotoniczność funkcji  $f$  (np. na podstawie wykresu znaku pochodnej):



$f'(r) > 0$  dla  $r \in \left(0, \frac{2}{5}d\right)$  (funkcja w tym przedziale rośnie),

$f'(r) < 0$  dla  $r \in \left(\frac{2}{5}d, \frac{1}{2}d\right)$  (funkcja w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja osiąga maksimum lokalne dla  $r = \frac{2}{5}d$ . Z analizy monotoniczności funkcji w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w dziedzinie.

Ponieważ funkcja  $g(x) = \sqrt{x}$  jest funkcją rosnącą, funkcja  $V$  oraz funkcja  $f$  są rosnące i malejące w tych samych przedziałach i przyjmują maksimum lokalne dla tego samego argumentu.

Wobec tego, ostrosłup ma największą objętość dla  $r = \frac{2}{5}d$ , czyli dla  $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$ . Wysokość

tego ostrosłupa jest równa  $H = \sqrt{d\left(d - \frac{4}{5}d\right)} = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ . Szukana objętość jest równa

$$V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3.$$

**Odp.** Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy  $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$ , objętość ta jest

równa  $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$ .

#### **Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokości w zależności od długości promienia okręgu opisanego na podstawie
- zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej  $r$ :  $V(r) = \frac{2}{3}\sqrt{r^4 d^2 - 2r^5 d}$ ,
- określenie dziedziny funkcji  $V$ :  $r \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$ .

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

Drugi etap składa się z trzech części:

- a) wprowadzenie funkcji pomocniczej  $f(r) = r^4 d^2 - 2r^5 d$  i wyznaczenie pochodnej  
 $f'(r) = 4r^3 d^2 - 10r^4 d = 2r^3 d(2d - 5r)$
- b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej  $r = \frac{2}{5}d$ ,
- c) uzasadnienie, że dla  $r = \frac{2}{5}d$  funkcja  $f$  osiąga największą wartość oraz że dla takiej wartości promienia objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

### Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji  $V$ , to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

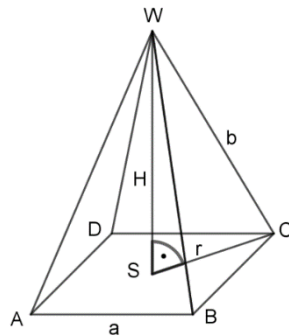
- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d. \text{ Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: } V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3.$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Rozwiązanie (II sposób)



Wprowadzamy oznaczenia, jak w I sposobie.

Z zależności  $r + b = d$  wyznaczamy  $b = d - r$ . W trójkącie SCW stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2 = d(d - 2r) : d \quad (d \neq 0)$$

$$\frac{H^2}{d} = d - 2r$$

$$r = \frac{1}{2} \left( d - \frac{H^2}{d} \right) = \frac{1}{2d} (d^2 - H^2)$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa  $P_p = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$  oraz objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 H = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4d^2} (d^2 - H^2)^2 \cdot H$$

$$V(H) = \frac{1}{6d^2} (d^4 H - 2d^2 H^3 + H^5)$$

Z warunków geometrycznych  $H > 0$  i  $H < r + b$  (nierówność trójkąta w trójkącie SWC) wyznaczamy dziedzinę funkcji  $V$ :

$$H \in (0, d)$$

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$$V'(H) = \frac{1}{6d^2} (5H^4 - 6d^2H^2 + d^4)$$

Obliczamy miejsca zerowe i analizujemy znak pochodnej

$$V'(H) = 0 \Leftrightarrow 5H^4 - 6d^2H^2 + d^4 = 0$$

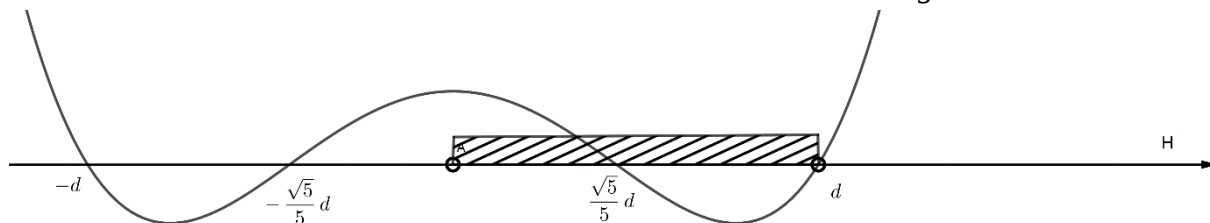
$$H^2 = t$$

$$5t^2 - 6d^2t + d^4 = 0$$

$$t = \frac{1}{5}d^2 \quad t = d^2$$

$$H = -\frac{\sqrt{5}}{5}d, \quad H = \frac{\sqrt{5}}{5}d, \quad H = -d, \quad H = d$$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej w przedziale  $(0, d)$  jest  $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ .



$V'(H) > 0$  dla  $H \in \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}d\right)$  (funkcja  $V$  w tym przedziale rośnie),

$V'(H) < 0$  dla  $H \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}d, d\right)$  (funkcja  $V$  w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja  $V$  osiąga maksimum lokalne dla  $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ . Z analizy

monotoniczności funkcji  $V$  w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w przedziale  $(0, d)$ .

Ostrosłup ma największą objętość dla  $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ , czyli dla  $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$ . Największa objętość

jest równa  $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

- a) wyznaczenie długości promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz pola podstawy w zależności od długości wysokości ostrosłupa

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej  $H$ :

$$V(H) = \frac{1}{6d^2}(d^4H - 2d^2H^3 + H^5)$$

c) określenie dziedziny funkcji  $V$ :  $H \in (0, d)$ .

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie**.

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej

$$V'(H) = \frac{1}{6d^2}(5H^4 - 6d^2H^2 + d^4),$$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej  $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$ ,

c) uzasadnienie, że dla  $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$  objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji  $V$ , to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d. \text{ Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: } V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3.$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.