

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

CZERWIEC 2016

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5
Odp.	A	D	B	A	C

Zadania kodowane

Zadanie 6.

9	2	3
---	---	---

Zadanie 7.

3	1	4
---	---	---

Zadania otwarte

Zadanie 8. (0–4)

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

Rozwiązanie

Obie strony nierówności $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ możemy podnieść do kwadratu, bo przyjmują wyłącznie wartości dodatnie. Otrzymujemy:

$$(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$$

$$(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0.$$

Nierówność $(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych $a, b, c, d > 0$, co kończy dowód.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania 1 p.

Zdający zauważy, że obie strony nierówności $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ są dodatnie i można nierówność obustronnie podnieść do kwadratu.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci: $(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci: $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga:

Jeżeli zdający przy podnoszeniu prawej strony nierówności do kwadratu otrzymuje wyrażenie $ac + bd$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$.

I sposób rozwiązania

Zauważmy, że nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej kolejno jako:

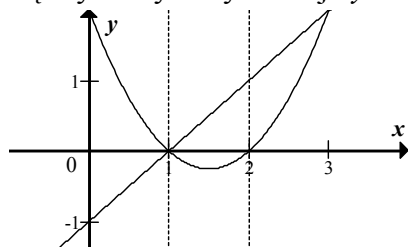
$$|x - 1| \cdot |x - 2| \geq |x - 1|,$$

$$|x - 1| \cdot (|x - 2| - 1) \geq 0.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|x - 1| \geq 0$, więc nierówność $|x - 1| \cdot (|x - 2| - 1) \geq 0$ jest równoważna nierówności $|x - 2| - 1 \geq 0$, czyli $|x - 2| \geq 1$. Z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, otrzymujemy $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$.

II sposób rozwiązania

Naszkicujmy w układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = x^2 - 3x + 2$ oraz $y = x - 1$.



Rozważmy nierówność kolejno w przedziałach $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 2)$ oraz $\langle 2, +\infty)$.

Gdy $x \in (-\infty, 1)$, to wtedy $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ oraz $|x - 1| = -(x - 1)$, a nierówność przyjmuje postać

$$x^2 - 3x + 2 \geq -x + 1,$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

$$(x - 1)^2 \geq 0.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x , zatem każda liczba $x \in (-\infty, 1)$ jest rozwiązaniem nierówności.

Gdy $x \in \langle 1, 2)$, to wtedy $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$ oraz $|x - 1| = x - 1$, a nierówność przyjmuje postać

$$-x^2 + 3x - 2 \geq x - 1,$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0,$$

$$(x - 1)^2 \leq 0.$$

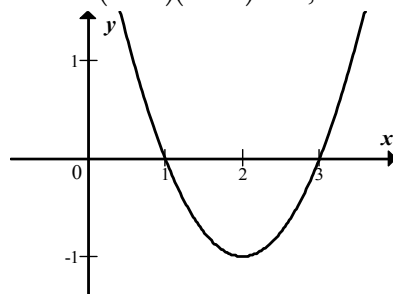
Nierówność ta jest prawdziwa tylko dla $x = 1$. Zatem w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ tylko liczba $x = 1$ jest rozwiązaniem nierówności.

Gdy $x \in \langle 2, +\infty \rangle$, to wtedy $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ oraz $|x - 1| = x - 1$, a nierówność przyjmuje postać

$$x^2 - 3x + 2 \geq x - 1,$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0,$$

$$(x - 1)(x - 3) \geq 0,$$



$$x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

Zatem w przedziale $\langle 2, +\infty \rangle$ rozwiązaniem nierówności jest każda liczba $x \in \langle 3, +\infty \rangle$.

W rezultacie rozwiązaniem nierówności $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$ jest każda liczba

$$x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.

gdy

- zapisze, że $|x - 1| \cdot |x - 2| = |x^2 - 3x + 2|$

albo

- zapisze, że nierówność należy rozważyć w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, +\infty \rangle$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

gdy

- zapisze nierówność w postaci iloczynowej: $|x - 1| \cdot (|x - 2| - 1) \geq 0$

albo

- zapisze poprawnie nierówność w każdym z przedziałów: $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, +\infty \rangle$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

gdy

- zapisze, że nierówność $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$ jest równoważna nierówności $|x - 2| \geq 1$

albo

- zapisze poprawnie nierówność w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 2 \rangle$, $\langle 2, +\infty \rangle$ i rozwiąże poprawnie tę nierówność w jednym lub dwóch spośród ww. przedziałów.

Rozwiązanie pełne 4 p.

gdy zapisze rozwiązanie nierówności, np.: $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważy wszystkie przedziały otwarte, tj. $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$, to otrzymuje **o 1 punkt mniej**, niż wynika to z osiągniętego przez niego etapu rozwiązania zadania.
2. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności $|x-1| \cdot (|x-2|-1) \geq 0$ przez $|x-1|$, nie zakładając, że $|x-1| > 0$ i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

III sposób rozwiązania

Ponieważ obie strony nierówności $|x^2 - 3x + 2| \geq |x-1|$ są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 2)^2 &\geq (x-1)^2, \\ x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 &\geq x^2 - 2x + 1, \\ x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$, gdyż $1^4 - 6 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 3 = 0$. Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x-1$. Stosując algorytm Hornera, otrzymujemy

	1	-6	12	-10	3
1	1	-5	7	-3	0

Zatem $W(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)$. Liczba 1 jest też pierwiastkiem wielomianu $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, gdyż $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 3 = 0$. Dzieląc ten wielomian przez $x-1$, otrzymujemy

	1	-5	7	-3
1	1	-4	3	0

Zatem $W(x) = (x-1)^2(x^2 - 4x + 3)$. Trójmian kwadratowy $x^2 - 4x + 3$ ma dwa pierwiastki $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, więc $W(x) = (x-1)^3(x-3)$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(x-1)^2 \geq 0$, więc nierówność $W(x) \geq 0$ jest równoważna nierówności kwadratowej

$$(x-1)(x-3) \geq 0,$$

której rozwiązaniem jest każda liczba $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Uwaga:

Nierówność $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq (x-1)^2$ możemy też przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 2)^2 - (x-1)^2 &\geq 0, \\ (x^2 - 3x + 2 - x + 1)(x^2 - 3x + 2 + x - 1) &\geq 0, \\ (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x + 1) &\geq 0, \\ (x-1)(x-3)(x-1)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

a dalej tak samo jak w III sposobie rozwiązania.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq (x - 1)^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej

- $(x - 1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) \geq 0$

albo

- $(x^2 - 3x + 2 - x + 1)(x^2 - 3x + 2 + x - 1) \geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $(x - 1)^3(x - 3) \geq 0$

albo

- wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$ i naszkicuje wykres tego wielomianu (lub wykresy odpowiednich czynników tego wielomianu).

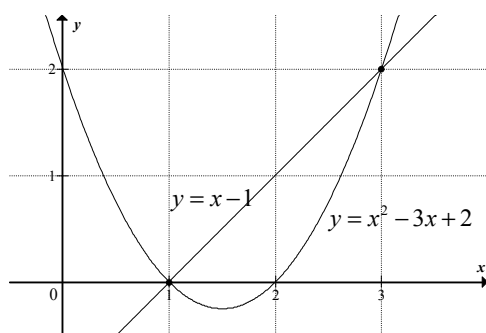
Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

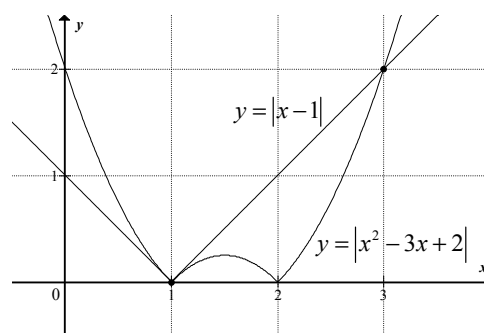
IV sposób rozwiązania

Naszkicujmy w układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ oraz $g(x) = |x - 1|$, przekształcając odpowiednio parabolę o równaniu $y = x^2 - 3x + 2$ oraz prostą o równaniu $y = x - 1$.

Ponieważ $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, więc parabola przecina oś Ox w punktach $(1, 0)$ i $(2, 0)$, a jej wierzchołkiem jest punkt $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.



Rys. 1.



Rys. 2.

Wykresy funkcji f i g przecinają się tylko w dwóch punktach: $(1,0)$, $(3,2)$. Wystarczy wykazać, że równanie $|x^2 - 3x + 2| = |x - 1|$ ma tylko dwa rozwiązania. Równanie to jest równoważne alternatywie równań

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x - 1 \text{ lub } x^2 - 3x + 2 = -x + 1, \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \text{ lub } x^2 - 2x + 1 = 0, \\ (x-1)(x-3) &= 0 \text{ lub } (x-1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Stąd $x=1$ lub $x=3$.

Schemat punktowania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający narysuje w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ i $g(x) = |x - 1|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający odczyta z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$: $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$, ale nie uzasadni, że wykresy funkcji f i g mają tylko dwa punkty wspólne.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający odczyta z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \geq g(x)$: $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$ oraz uzasadni, że wykresy funkcji f i g mają tylko dwa punkty wspólne.

Uwagi:

1. Akceptujemy przyjęcie bez uzasadnienia, że dla $x > 2$ wykresy funkcji f i g przecinają się w jednym punkcie $(3,2)$. Wymagamy natomiast uzasadnienia, że dla $x \leq 2$ wykresy tych funkcji mają tylko jeden punkt wspólny. Zdający może np. zauważyć, że prosta o równaniu $y = x - 1$ jest styczna do paraboli o równaniu $y = -x^2 + 3x - 2$ w punkcie $(1,0)$ tej paraboli, gdyż pochodna funkcji kwadratowej $h(x) = -x^2 + 3x - 2$ jest równa $h'(x) = -2x + 3$, a punkt $(1,0)$ leży na prostej o równaniu $y = x - 1$, na wykresie funkcji h oraz $h'(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$.
2. Jeżeli błędnie odczyta odciętą jednego z punktów wspólnych wykresów funkcji f i g i nie uzasadni, że wykresy tych funkcji mają tylko dwa punkty przecięcia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zadanie 10. (0–3)

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

Rozwiązanie

Ponieważ $a_4 = 4$ i $a_4 = a_3 + 3 - 4$, więc $a_3 = 5$.

Analogicznie $a_3 = a_2 + 2 - 4$, więc $a_2 = 7$ oraz $a_2 = a_1 + 1 - 4$, zatem $a_1 = 10$.

Ponieważ $a_5 = a_4 + 4 - 4 = a_4$, więc ciąg ten nie jest malejący.

Uwaga:

Możemy też zauważyć, że $a_{n+1} - a_n = n - 4$. Różnica ta jest ujemna tylko dla $n < 4$, a więc tylko pierwsze cztery wyrazy tego ciągu maleją. Dla $n = 4$ różnica jest równa 0, co oznacza, że czwarty i piąty wyraz ciągu jest taki sam. Ciąg ten nie jest zatem malejący.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy

- obliczy trzeci wyraz ciągu: $a_3 = 5$

albo

- uzasadni, że ciąg nie jest malejący.

Uwaga:

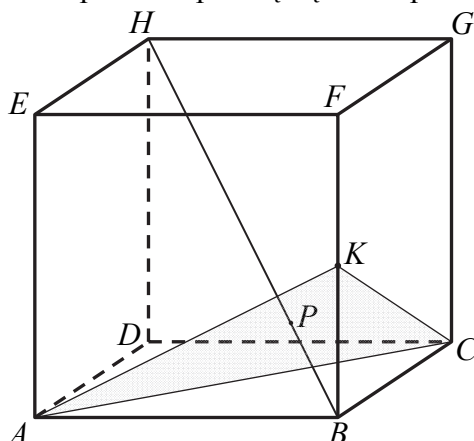
Zdający nie musi odwoływać się do definicji ciągu malejącego, wystarczy, że zauważy np., że $a_5 = a_4$ lub zapisze, że dla $n = 4$ różnica $a_{n+1} - a_n = n - 4$ jest równa 0, albo że dla $n > 4$ różnica jest dodatnia.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 10$.

Zdający otrzymuje 3 p.
gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 10$ oraz uzasadni, że ciąg nie jest malejący.

Zadanie 11. (0–3)

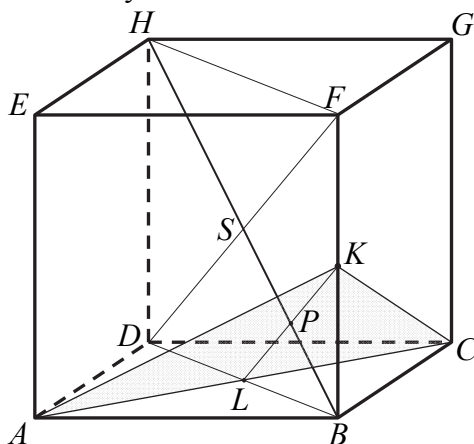
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Rozwiązanie

Punkt P leży w płaszczyźnie $DBFH$ i jest punktem przecięcia przekątnej BH z odcinkiem KL , gdzie L to środek przekątnej BD ściany $ABCD$.



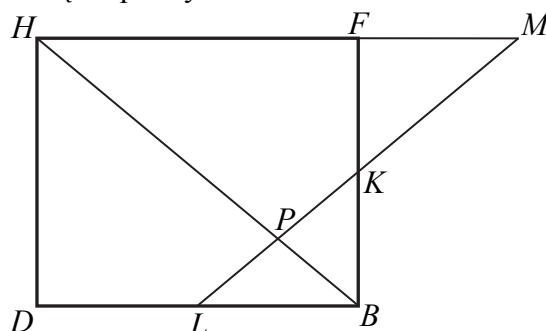
Odcinek KL łączy środki boków BD i BF trójkąta DBF , więc jest równoległy do boku DF . To oznacza, że trójkąt LBK jest podobny do trójkąta DBF w skali $1:2$. Zatem $|BP| = \frac{1}{2}|BS|$. Punkt S to środek przekątnej BH sześcianu, więc $|BP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|BH| = \frac{1}{4}|BH|$. Stąd wynika, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$. To kończy dowód.

Uwaga:

Tezę możemy udowodnić też w inny sposób.

Sposób I

Niech M oznacza punkt przecięcia prostych LK i HF .



Wówczas trójkąty LBK i MFK są przystające, gdyż oba są prostokątne, $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle MKF|$ (kąty wierzchołkowe) i $|KB| = |KF|$. Stąd wynika, że $|FM| = |LB| = \frac{1}{2}|DB|$.

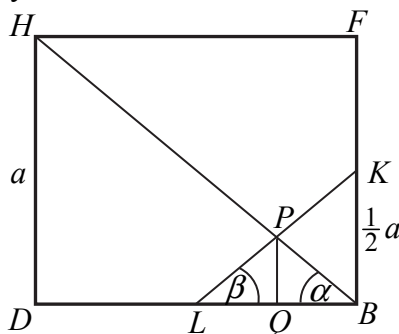
Trójkąty LBP i MHP są podobne ($|\sphericalangle LBP| = |\sphericalangle MHP|$ i $|\sphericalangle BLP| = |\sphericalangle HMP|$, gdyż są to pary kątów naprzemianległych, a proste LB i HM są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|HP|} = \frac{|LB|}{|HM|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|HF| + |FM|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DB| + \frac{1}{2}|DB|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

To kończy dowód.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|BK| = \frac{1}{2}a$, $|DB| = a\sqrt{2}$, $|HB| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|HD|}{|DB|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } \operatorname{tg} \beta = \frac{|KB|}{|LB|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a więc $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. Stąd wynika, że $\alpha = \beta$, gdyż α i β to kąty ostre. Stąd z kolei wynika, że trójkąt LBP jest równoramienny, więc spodek Q wysokości PQ tego trójkąta jest środkiem odcinka LB . Zatem $|QB| = \frac{1}{2}|LB| = \frac{1}{4}|DB|$.

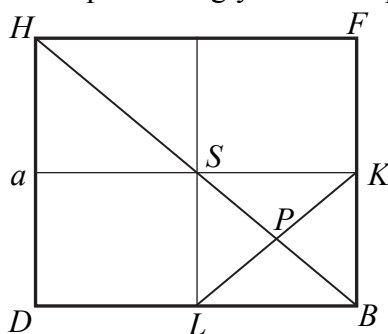
Trójkąty BPQ i BHD są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B), więc

$$\frac{|BP|}{|HB|} = \frac{|QB|}{|DB|} = \frac{\frac{1}{4}|DB|}{|DB|} = \frac{1}{4}.$$

Stąd wynika, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Sposób III

Poprowadźmy odcinek łączący środki przeciwległych boków prostokąta $BFHD$.



Przecinają się one w punkcie S , który jest środkiem przekątnej BH tego prostokąta. Punkt P jest natomiast środkiem przekątnej prostokąta $BKSL$. Stąd wynika, że

$$|BP| = \frac{1}{4}|BH| \text{ i } |HP| = \frac{3}{4}|BH|.$$

To oznacza, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy zauważy, że P jest punktem przecięcia przekątnej BH z odcinkiem KL , gdzie L to środek przekątnej BD .

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy

- zapisze, że trójkąty LBK i DBF są podobne w skali $1 : 2$
 - albo
 - zapisze, że odcinek KL jest obrazem odcinka FD w jednokładności o środku B i skali $\frac{1}{2}$,
 - albo
 - wykaże, że trójkąt LBP jest równoramienny np. wykaże, że $|\sphericalangle PBL| = |\sphericalangle PLB|$,
 - albo
 - poprowadzi odcinki łączące środek przekątnej BH z punktami K i L
- i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 p.
gdy wykaże, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Zadanie 12. (0–4)

Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2 x^2 + (k-1)x + 1 = 0, \text{ gdzie } k \neq 0.$$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^m$.

Rozwiązanie

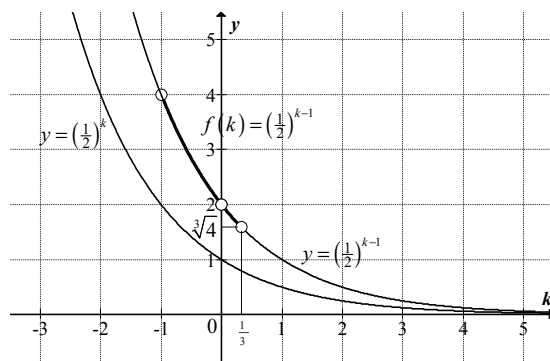
Równanie $k^2 x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ z niewiadomą x ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $k \neq 0$ i $(k-1)^2 - 4k^2 > 0$, a więc dla $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$. Suma m odwrotności rozwiązań jest określona wtedy, gdy $x_1 x_2 \neq 0$, a więc (ze wzoru Viete'a) gdy $\frac{1}{k^2} \neq 0$. To zachodzi dla każdej wartości $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$. Zatem

$$m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{k-1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = -(k-1).$$

Funkcja f jest więc określona wzorem

$$f(k) = 2^{-(k-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \text{ dla } k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3}).$$

Wykres funkcji f otrzymamy, przesuwając wykres funkcji wykładniczej $g(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ o wektor $\vec{u} = [1, 0]$, a następnie biorąc ten fragment otrzymanego wykresu, który odpowiada argumentom $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$.



Funkcja h , określona wzorem $h(k) = 2^{-(k-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ jest malejąca, $h(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1} = 4$, $h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $h\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}-1} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$, więc zbiorem wartości funkcji f jest $(\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, 4)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający rozwiąże nierówność $\Delta > 0$: $k \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania w zależności od k :

$$\text{np. } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -k + 1.$$

Rozwiązanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy wartości funkcji wykładniczej h , określonej wzorem $h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ dla argumentów $-1, 0, \frac{1}{3}$: $h(-1) = 4$, $h(0) = 2$, $h\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{4}$

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający wykorzysta monotoniczność funkcji wykładniczej i wyznaczy zbiór wartości funkcji $f: (\sqrt[3]{4}, 4) \setminus \{2\}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze i rozwiąże warunek $\Delta \geq 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie sumę odwrotności różnych rozwiązań danego równania, ale utworzy funkcję wykładniczą o niepoprawnym wzorze, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający nie uwzględni warunku $k \neq 0$ i wyznaczy zbiór wartości: $(\sqrt[3]{4}, 4)$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$, ale przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji uwzględni warunek $k \neq 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$ i warunek $k \neq 0$ uwzględni dopiero przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji f , to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający niepoprawnie rozwiąże nierówność $\Delta > 0$ i przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji nie uwzględni warunku $k \neq 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania w zależności od k , zapisze wzór funkcji f , stosując inną interpretację zmiennej niż przedstawiona w powyższym rozwiązaniu, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.
8. Akceptujemy następujące interpretacje.

I sposób interpretacji

Za taką odpowiedź zdający powinien otrzymać maksymalną punktację. Jeśli przyjąć, że równanie $k^2 x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ to równanie z niewiadomą x i parametrem k , gdzie $k \neq 0$, to wtedy funkcja f zmiennej x jest stała i zbiorem jej wartości jest $\{2^m\}$.

II sposób interpretacji

Jeśli przyjąć, że równanie $k^2x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ to równanie z niewiadomą x i parametrem k , a funkcję f potraktować jako funkcję zmiennej k , to zbiorem wartości funkcji f jest

$$\left(\sqrt[3]{4}, 2\right) \cup (2, 4).$$

9. Jeśli zdający wyznaczy m w zależności od k (np. $m = -k + 1$), ale nie zapisze warunku istnienia dwóch różnych pierwiastków równania kwadratowego i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 13. (0–3)

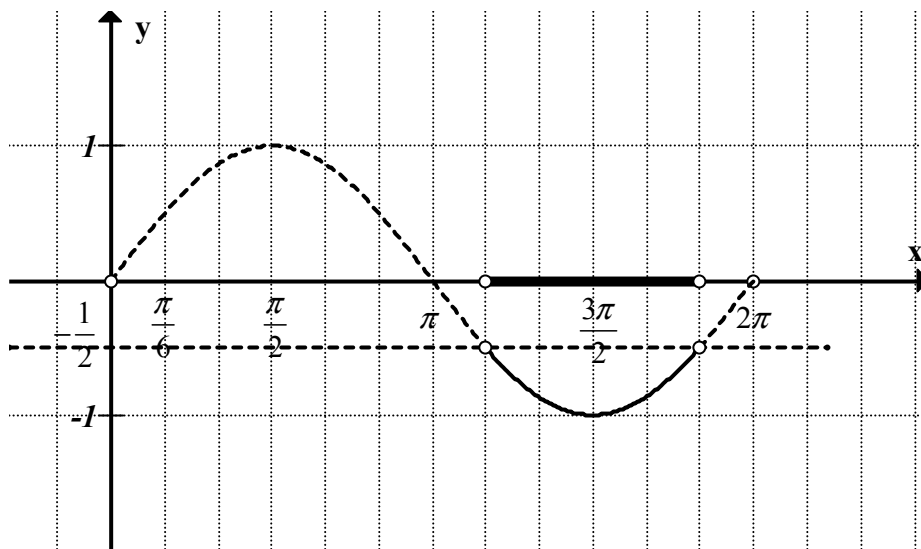
Rozwiąż nierówność $(2 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) > 0$ w przedziale $x \in (0, 2\pi)$.

Rozwiązanie I sposób (metoda podstawienia)

Podstawmy $\sin x = t$, otrzymamy nierówność $(2t - 3)(2t + 1) > 0$.

Stąd $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, czyli $\sin x < -\frac{1}{2}$ lub $\sin x > \frac{3}{2}$.

Nierówność $\sin x > \frac{3}{2}$ jest sprzeczna, zatem rozwiązujemy nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$ w przedziale $x \in (0, 2\pi)$.



Rozwiązanie: $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze

trudności zadania 1 p.

Zdający poda rozwiązanie nierówności $(2t-3)(2t+1) > 0$: $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

i zapisze go za pomocą alternatywy nierówności $\sin x < -\frac{1}{2}$ lub $\sin x > \frac{3}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający

- zauważy, że nierówność $\sin x > \frac{3}{2}$ jest sprzeczna

albo

- rozwiąże nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$: $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ rozwiąże nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$:
$$x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający zauważy, że nierówność $\sin x > \frac{3}{2}$ jest sprzeczna i rozwiąże nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

Rozwiązanie II sposób „zbiór wartości”

Zdający zauważy, że nierówność $2\sin x - 3 < 0$ spełniona jest dla $x \in R$.

Zatem, aby spełniona była nierówność $(2\sin x - 3)(2\sin x + 1) > 0$ wystarczy rozwiązać warunek $2\sin x + 1 < 0$.

Stąd $\sin x < -\frac{1}{2}$, czyli $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

Schemat punktowania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 2 p.

Zdający:

- zauważy, że nierówność $2\sin x - 3 < 0$ spełniona jest dla $x \in R$

albo

- rozwiąże nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$: $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne 3 p.

Zdający zauważy, że nierówność $2\sin x - 3 < 0$ spełniona jest dla $x \in R$ i rozwiąże

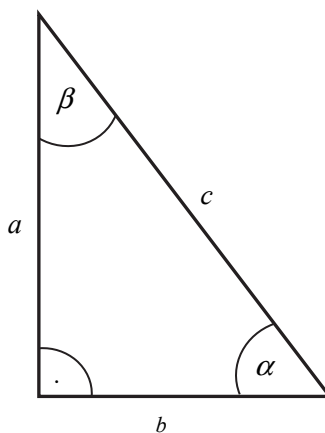
nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$: $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

Zadanie 14. (0–4)

W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Rozwiązanie (I sposób)

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



Bez zmniejszania ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a > b$. Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2},$$

które jest równoważne równaniu

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{1}{2}.$$

Oznacza to, że $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$, a stąd wynika, że $\sin \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{2}$. Podstawiamy tę zależność do tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i otrzymujemy równanie

$$2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$.

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc drugie rozwiązanie należy odrzucić. Pozostaje obliczyć cosinus drugiego kąta ostrego. Ale $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc $\cos \beta = \sin \alpha$.

Z równości

$$\sin \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{2}$$

otrzymujemy $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny

na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.

Zdający zapisze równość $\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2}$ w postaci $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający podstawia równość $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ do tożsamości $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$ i doprowadzi otrzymane równanie do postaci uporządkowanego równania kwadratowego, np.

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.

Zdający zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}, \cos \alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$$

oraz odrzuci ujemne rozwiązanie tego równania i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

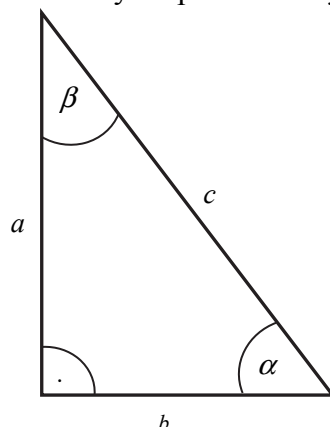
Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy i zapisze cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta: $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$$\cos \beta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

Rozwiązanie (II sposób)

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



Bez straty ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a > b$. Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2},$$

Z tej równości wyznaczamy $a = b + \frac{c}{2}$. Ponieważ dany trójkąt jest trójkątem prostokątnym, więc stosujemy twierdzenie Pitagorasa i mamy:

$$\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2,$$

które jest równoważne równaniu

$$3c^2 - 4bc - 8b^2 = 0.$$

Otrzymane równanie można potraktować jako równanie kwadratowe z niewiadomą c i parametrem b . Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania

$$\Delta = 112b^2 = (4b\sqrt{7})^2,$$

jest liczbą dodatnią ($b > 0$), więc istnieją dwa rozwiązania tego równania:

$$c_1 = \frac{4b + 4b\sqrt{7}}{6} = \frac{2b(1+\sqrt{7})}{3} \text{ oraz } c_2 = \frac{4b - 4b\sqrt{7}}{6} = \frac{2b(1-\sqrt{7})}{3}.$$

Ponieważ $c_2 < 0$, więc to rozwiązanie należy odrzucić, bo c jest długością boku w trójkącie. Obliczamy zatem cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta, stosując definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{\frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}} = \frac{3}{2(1+\sqrt{7})} = \frac{3(1-\sqrt{7})}{-12} = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}.$$

Podstawiamy $c = \frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}$ do równości $a = b + \frac{c}{2}$ i otrzymujemy $a = \frac{b(4+\sqrt{7})}{3}$.

Zatem cosinus drugiego kąta ostrego jest równy:

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\frac{b(4+\sqrt{7})}{3}}{\frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}} = \frac{4+\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})} = \frac{-3(1+\sqrt{7})}{-12} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny

na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze równość $\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2}$, a następnie wyznaczy z niej jedną zmienną np.

$$a = b + \frac{c}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający skorzysta z twierdzenia Pitagorasa i doprowadzi równanie $\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2$ do równania kwadratowego z niewiadomą c i parametrem b

$$3c^2 - 4bc - 8b^2 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze dodatnie rozwiązanie tego równania $c_1 = \frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}$, a następnie obliczy cosinus kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy i zapisze cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta: $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$,

$$\cos \beta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

Zadanie 15. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie (I sposób)

Rozpatrujemy dwa przypadki:

- Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, którą możemy wybrać na 5 sposobów, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy dwa, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na 5^2 sposobów. Na pozostałych dwóch miejscach umieszczamy cyfry parzyste na 5^2 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych wynosi $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 18750$.
- Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta, którą możemy wybrać na 4 sposoby, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy trzy, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na 5^3 sposobów. Na pozostałym miejscu umieszczamy cyfrę

parzystą na 5 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych wynosi $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 = 10000$.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest $18750 + 10000 = 28750$.

Rozwiązanie (II sposób)

W pierwszej kolejności obliczymy liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzyste: $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2$. Wśród nich jest $\binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$ ciągów, których pierwszym wyrazem jest cyfra 0. Pozostałe ciągi reprezentują rozpatrywane liczby.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest:

$$\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2 - \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 5^5 - 4 \cdot 5^4 = 10 \cdot 5 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^4 = 46 \cdot 5^4 = 28750.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.

Zdający

- rozpatrzy dwa przypadki ze względu na to, czy pierwsza cyfra liczby (licząc od lewej strony) jest parzysta, czy nieparzysta i w każdym z tych przypadków zapisze na ile sposobów można wybrać pierwszą cyfrę: 4 w pierwszy przypadku, 5 w drugim przypadku

albo

- zapisze, że jest $\binom{5}{3}$ możliwości rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych,

albo

- zapisze 10 przypadków rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych:

```

N N _ _ _
N _ N _ _
N _ _ N _
N _ _ _ N
_ N N _ _
_ N _ N _
_ N _ _ N
_ _ N N _
_ _ N _ N
_ _ _ N N,

```

albo

- zapisze, że albo obliczyć liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb wystarczy od liczby wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzystymi odjąć liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ i pierwszym wyrazem ciągu jest cyfra 0

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze liczbę wszystkich

- rozpatrywanych liczb, których pierwsza cyfra jest parzysta: $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$

albo

- rozpatrywanych liczb, których pierwsza cyfra jest nieparzysta: $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2$,

albo

- liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzystymi: $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2$,

albo

- zapisze liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ i pierwszym wyrazem ciągu jest cyfra 0: $\binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający zapisze liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb pięciocyfrowych

- $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 + 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2$

albo

- $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2 - \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$,

albo

- obliczy bezbłędnie liczbę liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania, których pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, a liczbę liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania, których pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta obliczy z błędem rachunkowym (lub odwrotnie) i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy liczbę rozpatrywanych liczb.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający, obliczy, że wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest 28750.

Uwaga:

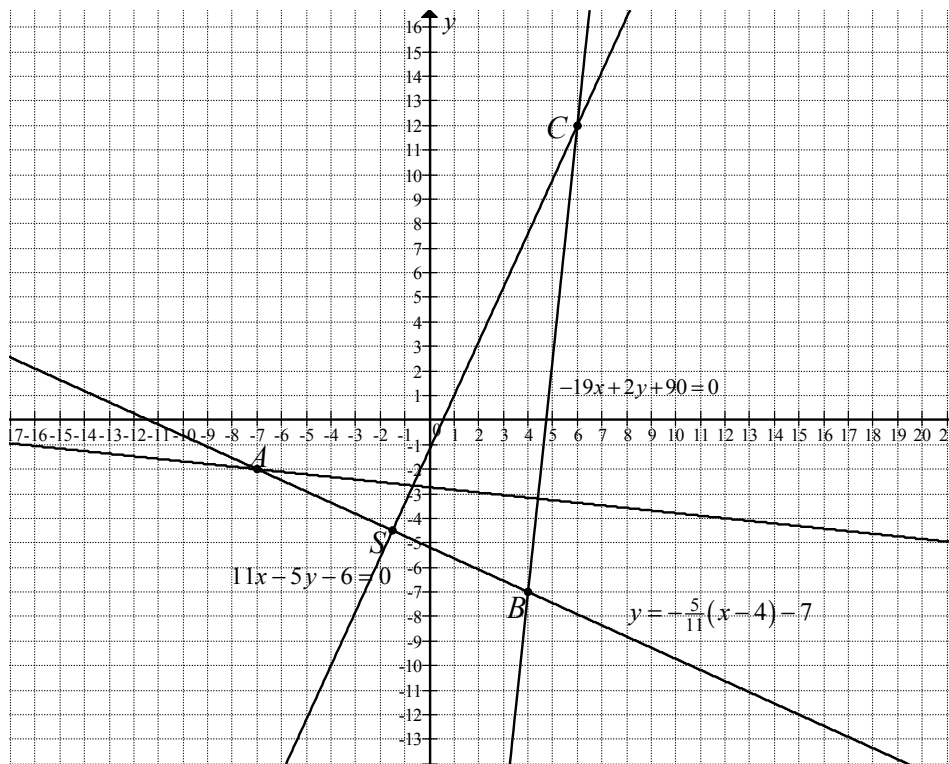
Jeżeli zdający pominie jeden z 10 przypadków rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 16. (0–5)

Punkty $A = (-7, -2)$ i $B = (4, -7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC , a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

Rozwiązanie (I sposób)

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc wierzchołek C leży na symetralnej podstawy AB i na prostej BC , która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$ (wysokości opuszczonej z wierzchołka A tego trójkąta).



Niech S będzie środkiem odcinka AB . Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-7 + 4}{2}, \frac{-2 - 7}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Prosta AB ma równanie postaci $y = \frac{-7 - (-2)}{4 - (-7)}(x - 4) - 7$, czyli $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$.

Symetralna odcinka AB jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$

i przechodzi przez punkt S , zatem ma postać $y = \frac{11}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2}$, czyli $y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}$ lub

$$11x - 5y - 6 = 0.$$

Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$ i przechodzi przez punkt $B = (4, -7)$, więc ma równanie postaci $-19(x - 4) + 2(y + 7) = 0$, czyli $-19x + 2y + 90 = 0$.

Obliczmy współrzędne punktu C przecięcia tych dwóch prostych, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5} \text{ i } -19x + 2y + 90 = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned} -19x + 2\left(\frac{11}{5}x - \frac{6}{5}\right) + 90 &= 0, \\ -19 \cdot 5x + 2(11x - 6) + 90 \cdot 5 &= 0, \\ 73x &= 438, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Zatem $y = \frac{11}{5} \cdot 6 - \frac{6}{5} = \frac{60}{5} = 12$, więc $C = (6, 12)$.

Uwaga:

Równanie symetralnej podstawy AB trójkąta możemy wyznaczyć nieco inaczej.

Sposób a). Wykorzystamy fakt, że jest ona prostopadła do wektora AB i przechodzi przez środek S odcinka AB . Współrzędne wektora AB są równe $\overrightarrow{AB} = [4 - (-7), -7 - (-2)] = [11, -5]$.

Symetralna odcinka AB jest prostopadła do wektora AB i przechodzi przez punkt $S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$, więc ma ona równanie postaci $11\left(x + \frac{3}{2}\right) - 5\left(y + \frac{9}{2}\right) = 0$, czyli $11x - 5y - 6 = 0$.

Sposób b). Wykorzystamy fakt, że symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny równo oddalonych od jego końców. Niech $C = (x, y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na symetralnej odcinka AB . Zatem $|AC| = |BC|$. Stąd, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+7)^2 + (y+2)^2} &= \sqrt{(x-4)^2 + (y+7)^2}, \\ (x+7)^2 + (y+2)^2 &= (x-4)^2 + (y+7)^2, \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 14y + 49, \\ 11x - 5y - 6 &= 0, \text{ czyli } y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający

- wyznaczy współrzędne środka S podstawy AB i zapisze równanie prostej AB :

$$S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right), \quad y = -\frac{5}{11}(x-4) - 7$$

albo

- wyznaczy współrzędne środka S podstawy AB i obliczy współczynnik kierunkowy prostej AB : $S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right), \quad a = -\frac{5}{11}$,

albo

- wyznaczy współrzędne środka S podstawy AB i obliczy współrzędne wektora AB :

$$S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right), \quad \overrightarrow{AB} = [11, -5],$$

albo

- zapisze równanie symetralnej odcinka AB w postaci

$$\sqrt{(x+7)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+7)^2}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy:

- równanie prostej SC : $y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}$ lub $11x - 5y - 6 = 0$

albo

- równanie prostej BC : $-19x + 2y + 90 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający wyznaczy równania prostych SC i BC : $y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}$ (lub $11x - 5y - 6 = 0$),
 $-19x + 2y + 90 = 0$ i zapisze, że C jest punktem przecięcia tych dwóch prostych.

Uwaga:

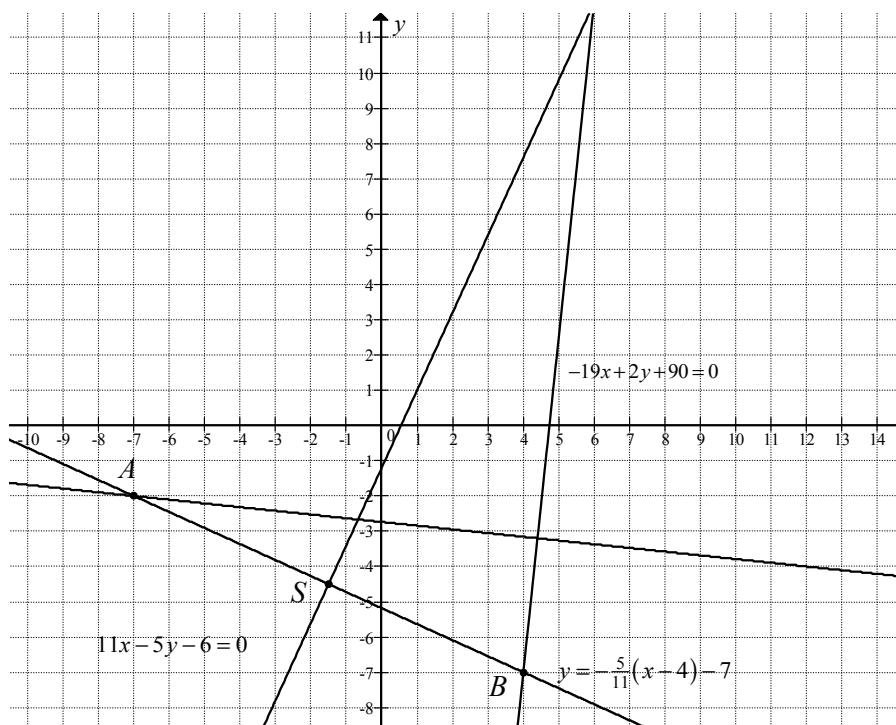
Jeżeli zdający wyznaczając równania prostych SC i BC popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka C : $(6, 12)$.

Rozwiązanie (II sposób)

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc $|AC| = |BC|$ i punkt C leży na prostej BC , która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$ (wysokości opuszczonej z wierzchołka A tego trójkąta).



Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$ i przechodzi przez punkt $B = (4, -7)$, więc ma równanie postaci

$$\begin{aligned} -19(x - 4) + 2(y + 7) &= 0, \\ -19x + 2y + 90 &= 0, \\ y &= \frac{19}{2}x - 45. \end{aligned}$$

Zatem punkt C ma współrzędne $C = \left(x_c, \frac{19}{2}x_c - 45\right)$.

Trójkąt ABC jest równoramienny i jego podstawą jest AB , zatem $|AC| = |BC|$.

Zatem

$$\sqrt{(x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 2\right)^2} = \sqrt{(x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 7\right)^2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} (x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 2\right)^2 &= (x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 7\right)^2, \\ (x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 43\right)^2 &= (x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 38\right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_c^2 + 14x_c + 49 + \left(\frac{19}{2}x_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{19}{2}x_c \cdot 43 + 1849 &= x_c^2 - 8x_c + 16 + \left(\frac{19}{2}x_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{19}{2}x_c \cdot 38 + 1444, \\
14x_c + 49 - 19 \cdot 43x_c + 1849 &= -8x_c + 16 - 19 \cdot 38x_c + 1444, \\
14x_c + 722x_c - 817x_c + 8x_c &= -1849 + 16 - 49 + 1444, \\
-73x &= -438, \\
x &= 6.
\end{aligned}$$

Stąd $y = \frac{19}{2} \cdot 6 - 45 = 57 - 45 = 12$, więc $C = (6, 12)$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze, że $|AC| = |BC|$ i punkt C leży na prostej BC , która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy równanie prostej BC : $-19x + 2y + 90 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający zapisze współrzędne punktu C w zależności od jednej zmiennej $C = \left(x_c, \frac{19}{2}x_c - 45\right)$ oraz zapisze równanie z jedną niewiadomą pozwalające obliczyć współrzędną punktu C , np.:

$$\sqrt{(x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 2\right)^2} = \sqrt{(x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 7\right)^2}.$$

Uwaga:

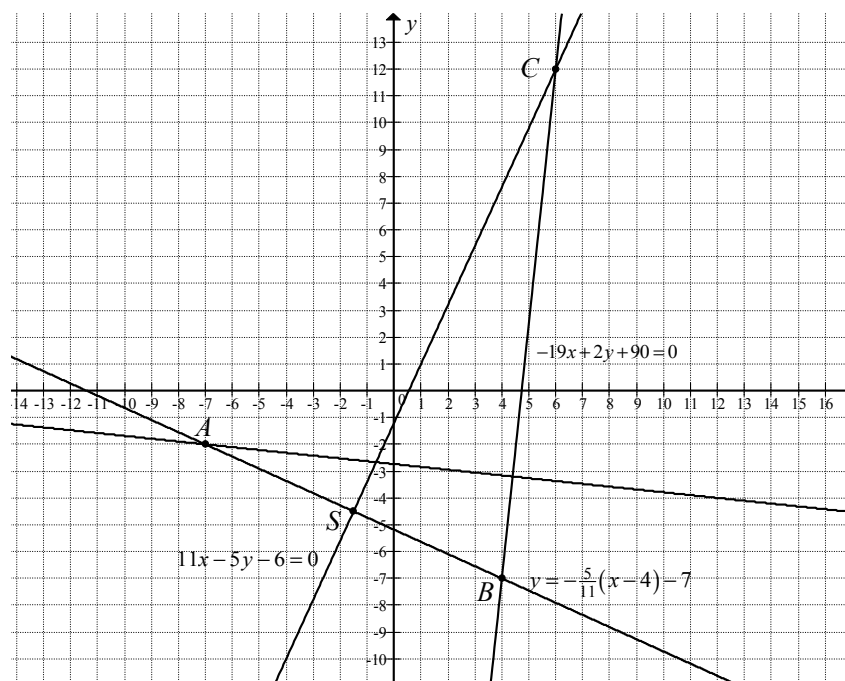
Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu C w zależności od jednej zmiennej $C = \left(x_c, \frac{19}{2}x_c - 45\right)$ i nie zapisze równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć współrzędną punktu C , to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka C : $(6, 12)$.

Rozwiązanie (III sposób)

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc wierzchołek C leży na symetralnej podstawy AB



Niech $C = (c_1, c_2)$. Punkt C leży na prostej BC , która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$ (zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka A tego trójkąta). Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ ma współrzędne $\overrightarrow{BC} = k \cdot [2, 19]$ oraz $\overrightarrow{BC} = [c_1 - 4, c_2 + 7]$.

Zatem

$$[c_1 - 4, c_2 + 7] = k \cdot [2, 19],$$

$$c_1 - 4 = k \cdot 2, \quad c_2 + 7 = k \cdot 19,$$

$$c_1 = 2k + 4, \quad c_2 = 19k - 7.$$

Punkt C ma współrzędne $C = (2k + 4, 19k - 7)$.

Niech S będzie środkiem odcinka AB . Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-7 + 4}{2}, \frac{-2 - 7}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Prosta AB ma równanie postaci $y = \frac{-7 - (-2)}{4 - (-7)}(x - 4) - 7$, czyli $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$.

Symetralna odcinka AB jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$ i przechodzi przez punkt S , zatem ma postać

$$y = \frac{11}{5} \left(x + \frac{3}{2} \right) - \frac{9}{2},$$

$$y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}19k - 7 &= \frac{11}{5}(2k + 4) - \frac{6}{5}, \\95k - 35 &= 11(2k + 4) - 6, \\95k - 22k &= 35 = 44 - 6 + 35, \\73k &= 73, \\k &= 1.\end{aligned}$$

Uwaga:

Obliczenia, gdy prosta SC ma postać $11x - 5y - 6 = 0$.

$$\begin{aligned}11(2k + 4) - 5(19k - 7) - 6 &= 0, \\22k + 44 - 95k + 35 - 6 &= 0, \\73k &= 73, \\k &= 1.\end{aligned}$$

Stąd punkt C ma współrzędne $C = (2 \cdot 1 + 4, 19 \cdot 1 - 7) = (6, 12)$.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Zdający zapisze:

- prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ ma współrzędne $\overrightarrow{BC} = k \cdot [2, 19]$

albo

- współrzędne punktu C , np.: $C = (c_1, c_2)$ oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w postaci, np. $\overrightarrow{BC} = [c_1 - 4, c_2 + 7]$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu C w zależności od parametru k ,

$$\text{np. } C = (2k + 4, 19k - 7).$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 p.

Zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka AB : $11x - 5y - 6 = 0$ i wstawi współrzędne punktu $C = (2k + 4, 19k - 7)$ do tego równania.

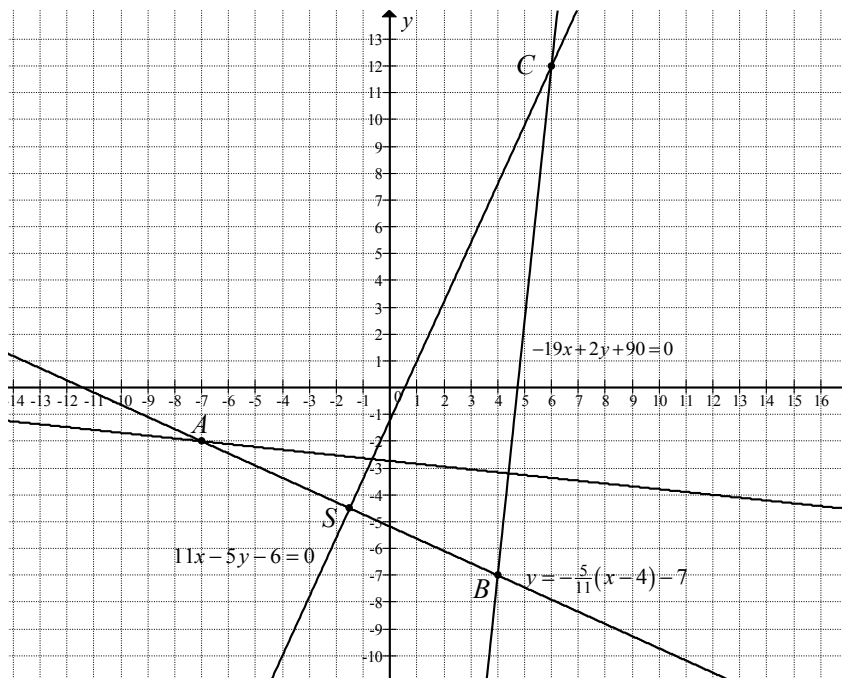
Rozwiązanie pełne 5 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka C : $(6, 12)$

Uwaga:

Zdający może przeprowadzić następujące rozważania.

Punkt C leży na prostej BC , która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$ (wysokości opuszczonej z wierzchołka A tego trójkąta).



Punkt C ma współrzędne $C = (c_1, c_2)$.

Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ może mieć współrzędne $\overrightarrow{BC} = [2, 19]$ oraz $\overrightarrow{BC} = [c_1 - 4, c_2 + 7]$.

Zatem

$$[c_1 - 4, c_2 + 7] = [2, 19],$$

$$c_1 - 4 = 2, \quad c_2 + 7 = 19,$$

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 12.$$

Punkt C może mieć współrzędne $C = (6, 12)$.

Następnie należy sprawdzić jeden z warunków :

a) czy zachodzi równość $|AC| = |BC|$,

b) czy punkt $C = (6, 12)$ leży na symetralnej podstawy AB .

Sprawdzenie warunku $|AC| = |BC|$

Obliczamy

$$|AC| = \sqrt{(6+7)^2 + (12+2)^2} = \sqrt{13^2 + 14^2} = \sqrt{169 + 196} = \sqrt{365}$$

oraz

$$|BC| = \sqrt{(6-4)^2 + (12+7)^2} = \sqrt{2^2 + 19^2} = \sqrt{4 + 361} = \sqrt{365}.$$

Stąd $|AC| = |BC|$ i punkt $C = (6, 12)$.

Sprawdzenie czy punkt $C = (6, 12)$ leży na symetralnej podstawy AB .

Wyznaczamy równanie symetralnej SC .

Niech S będzie środkiem odcinka AB . Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{-7 + 4}{2}, \frac{-2 - 7}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Prosta AB ma równanie postaci $y = \frac{-7 - (-2)}{4 - (-7)}(x - 4) - 7$, czyli $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$.

Symetralna odcinka AB jest prostopadła do tej i przechodzi przez punkt S , zatem ma postać

$$y = \frac{11}{5} \left(x + \frac{3}{2} \right) - \frac{9}{2},$$

$$y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5} \text{ lub } 11x - 5y - 6 = 0.$$

Sprawdzamy, czy współrzędne punktu $C = (6, 12)$ spełniają równanie symetralnej:

$$y = \frac{11}{5} \cdot 6 - \frac{6}{5} = \frac{66 - 6}{5} = 12. \text{ Zatem wierzchołek } C \text{ ma współrzędne: } (6, 12).$$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający tylko poda współrzędne punktu $C = (6, 12)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poda współrzędne punktu $C = (6, 12)$ i konsekwentnie sprawdzi czy zachodzi równość $|AC| = |BC|$, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający poda współrzędne punktu $C = (6, 12)$, wyznaczy równanie symetralnej podstawy AB i konsekwentnie sprawdzi, czy punkt C leży na tej symetralnej, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 17. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π . Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

Rozwiązanie

Niech r oraz h oznaczają, odpowiednio, promień i wysokość walca ($r > 0$ i $h > 0$). Ponieważ pole P powierzchni całkowitej tego walca jest określone wzorem $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, więc otrzymujemy równanie $2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, które jest równoważne równaniu $1 = r^2 + rh$. Z tego równania wyznaczamy wysokość walca, $h = \frac{1-r^2}{r}$. Zauważamy, że nierówność $h > 0$ jest równoważna nierówności $0 < r < 1$. Objętość walca równą $V = \pi r^2 h$ zapisujemy jako funkcję zmiennej r :

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r} = \pi r - \pi r^3, \text{ gdzie } 0 < r < 1.$$

Pochodna tej funkcji jest określona wzorem $V'(r) = \pi(1-3r^2)$ dla $0 < r < 1$. Dla $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$

pochoďna funkcji przyjmuje wartość zero. Ponadto, dla $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{3}$ pochoďna funkcji

przyjmuje wartości dodatnie, zaś dla $\frac{\sqrt{3}}{3} < r < 1$ wartości dodatnie. Oznacza to, że w punkcie

$r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ objętość V tego walca osiąga maksimum lokalne. To maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością funkcji $V(r) = \pi r - \pi r^3$ w przedziale $(0, 1)$, ponieważ dla

$0 < r \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja V jest rosnąca, a dla $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq r < 1$ jest malejąca.

Zatem, przy danym polu powierzchni całkowitej, największą objętość ma walec, którego promień podstawy równa się $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Jeżeli $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Największa objętość tego

walca jest więc równa $V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- zapisanie równania $2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$,
- zapisanie objętości danego walca jako funkcji jednej zmiennej, np.

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r} = \pi r - \pi r^3,$$

- zapisanie, że dziedziną funkcji $V(r)$ jest przedział $(0, 1)$.

Za zapisanie poprawnego równania w **pierwszej** części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**. Za poprawne zapisanie objętości rozważanego walca w **drugiej** części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile pierwsza część etapu została zrealizowana bezbłędnie. Punkt za **trzecią** część zdający otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części.

b) **Drugi etap** składa się z trzech części:

- zapisanie wzoru pochodnej funkcji $V(r)$, np.: $V'(r) = \pi(1 - 3r^2)$,
- zapisanie, że w przedziale $(0, 1)$ pochodna funkcji V ma jedno miejsce zerowe

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

- zapisanie, że funkcja $V(r)$ osiąga w punkcie $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ maksimum lokalne i uzasadnienie, że to maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) **Trzeci etap**:

1 punkt zdający otrzyma za zapisanie, że dla $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ walec ma największą objętość równą

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Uwaga:

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.