

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**i**

**FORMUŁA DO 2014  
(„STARA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**SIERPIEŃ 2016**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

| Nr zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Odp.    | A | B | D | B | B | A | A | B | A | D  | C  | D  | B  | C  | C  | D  | A  | D  | C  | C  | D  | C  | A  | D  | B  |

## Schemat oceniania zadań otwartych

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $3x^2 - 6x \geq (x-2)(x-8)$ .

#### Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $2x^2 + 4x - 16$  lub  $x^2 + 2x - 8$ .**

**Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.**

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci  $x^2 + 2x - 8 \geq 0$  i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x^2 + 2x - 8$ 
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:  
 $\Delta = 4 + 32 = 36$  i stąd  $x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$  oraz  $x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$
- albo
  - stosujemy wzory Viète'a:  
 $x_1 \cdot x_2 = -8$  oraz  $x_1 + x_2 = -2$ , stąd  $x_1 = 2$  oraz  $x_2 = -4$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci  $(x-2)(2x+8) \geq 0$ , skąd bezpośrednio odczytujemy pierwiastki:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -4$ ,

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej  $|x+1| \geq 3$ , korzystając z własności wartości bezwzględnej, i odczytujemy te wartości  $x$ , dla których  $|x+1| = 3$ :  
 $x = -4$ ,  $x = 2$ .

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$ .

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
 gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójkianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.:  $x_1 + x_2 = 1$  i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze nierówność z wartością bezwzględną, np.  $|x-1| \geq 3$  i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -4) \cup \langle 2, +\infty)$  lub  $(x \leq -4 \text{ lub } x \geq 2)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x \leq -4, x \geq 2$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

#### Uwagi

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci:  $x \leq -4$  i  $x \geq 2$ ,  $x \leq -4$  oraz  $x \geq 2$  itp.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x-2$  bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x-2$ , rozważając dwa przypadki  $x-2 > 0$  oraz  $x-2 < 0$ , rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków, ale nie rozważy przypadku  $x-2 = 0$ , to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójkianu  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -4$  i błędnie zapisze odpowiedź, np.  $(-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

#### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np.  $(-\infty, 2) \cup \langle -4, +\infty)$ ,  $\langle -4, -\infty) \cup (+\infty, 2)$ .

**Zadania 27. (0–2)**

Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy niezmieniony, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę  $\frac{8}{17}$ . Wyznacz ten ułamek.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Niech  $x$  i  $y$  oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego.

Z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{x+32}{y} &= 2 \quad \text{oraz} \quad \frac{x-6}{y-6} = \frac{8}{17}, \\ 2y &= x+32 \quad \text{oraz} \quad 17(x-6) = 8(y-6), \\ 2y &= x+32 \quad \text{oraz} \quad 17x-102 = 8y-48.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}17x-54 &= 4x+128, \\ 13x &= 182, \\ x &= 14,\end{aligned}$$

więc  $2y = 14 + 32 = 46$ . Zatem  $y = 23$ .

Szukany ułamek to  $\frac{14}{23}$ . Jest to ułamek nieskracalny.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\frac{x+32}{y} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{x-6}{y-6} = \frac{8}{17}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy wyznaczy szukany ułamek:  $\frac{14}{23}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający obliczy licznik  $x=14$  i mianownik  $y=23$  szukanego ułamka, ale nie zapisze tego ułamka, to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Dodając do licznika i do mianownika ułamka  $\frac{8}{17}$  liczbę 6, otrzymujemy ułamek  $\frac{14}{23}$ . Jest to ułamek nieskracalny, a gdy do jego licznika dodamy liczbę 32, to otrzymujemy  $\frac{14+32}{23} = \frac{46}{23} = 2$ . Zatem szukany ułamek to  $\frac{14}{23}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy doda do licznika i do mianownika ułamka  $\frac{8}{17}$  liczbę 6, zapisze, że szukany ułamkiem jest  $\frac{14}{23}$  i nie zapisze, że  $\frac{14+32}{23} = \frac{46}{23} = 2$ , a więc, że spełnia on drugi z warunków podanych w treści zadania.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
 gdy doda do licznika i do mianownika ułamka  $\frac{8}{17}$  liczbę 6, zapisze, że szukanym ułamkiem jest  $\frac{14}{23}$  oraz sprawdzi, że  $\frac{14+32}{23} = \frac{46}{23} = 2$ .

### **Zadanie 28. (0–2)**

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają warunek  $abc = 1$ , to

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + ac + bc.$$

### **Rozwiązanie**

Zauważmy, że

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc}.$$

Wykorzystujemy warunek  $abc = 1$  i otrzymujemy zależność

$$\frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{1} = bc + ac + ab,$$

co kończy dowód.

### **Uwaga**

Też możemy też uzasadnić w inny sposób:

1) Korzystamy z równości  $abc = 1$

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\cancel{a}bc}{\cancel{a}} + \frac{a\cancel{b}c}{\cancel{b}} + \frac{ab\cancel{c}}{\cancel{c}} = bc + ac + ab.$$

2) Z równości  $abc = 1$  otrzymujemy:  $bc = \frac{1}{a}$ ,  $ac = \frac{1}{b}$ ,  $ab = \frac{1}{c}$ . Zatem

$$bc + ac + ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}.$$

### **Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
 gdy

- wykorzysta definicję potęgi o wykładniku  $-1$  i zapisze lewą stronę podanej równości w postaci  $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$  lub  $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + \frac{abc}{c}$

albo

- wykorzysta definicję potęgi o wykładniku  $-1$ , pomnoży obie strony podanej równości przez iloczyn  $abc$  i zapisze równość w postaci równoważnej

$$\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc = ab \cdot abc + ac \cdot abc + bc \cdot abc,$$

albo

- wykorzysta założenie  $abc = 1$ , wyznaczając stąd iloczyny:  $ab = \frac{1}{c}$ ,  $ac = \frac{1}{b}$ ,  $bc = \frac{1}{a}$  oraz zapisze prawą stronę podanej równości w postaci  $ab + ac + bc = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy poda pełne uzasadnienie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość wzoru jedynie w wybranych przypadkach, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 29. (0–2)**

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem  $f(x) = x^2 - 11x$ . Oblicz najmniejszą wartość funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -6, 6 \rangle$ .

**Rozwiązanie**

Wykresem funkcji  $f$  jest parabola o wierzchołku w punkcie, którego pierwsza współrzędna jest równa  $x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{11}{2}$ . Ponieważ argument  $x_w = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$  należy do przedziału  $\langle -6, 6 \rangle$ , więc najmniejszą wartością funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -6, 6 \rangle$  jest  $f\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{121}{4} = -30\frac{1}{4}$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

- gdy obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli  $x_w = 5\frac{1}{2}$ , zapisze, że  $x_w \in \langle -6, 6 \rangle$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszej współrzędnej wierzchołka tej paraboli i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy najmniejszą wartość funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -6, 6 \rangle$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że najmniejsza wartość funkcji  $f$  w przedziale  $\langle -6, 6 \rangle$  jest równa

$$f\left(\frac{11}{2}\right) = -30\frac{1}{4}.$$

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający zapisze jedynie trzy wartości funkcji:  $f(-6) = 102$ ,  $f\left(\frac{11}{2}\right) = -30\frac{1}{4}$  i  $f(6) = -30$  oraz sformułuje poprawną odpowiedź, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze tylko obliczenie jednej wartości  $f\left(\frac{11}{2}\right) = -30\frac{1}{4}$  oraz sformułuje poprawną odpowiedź, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

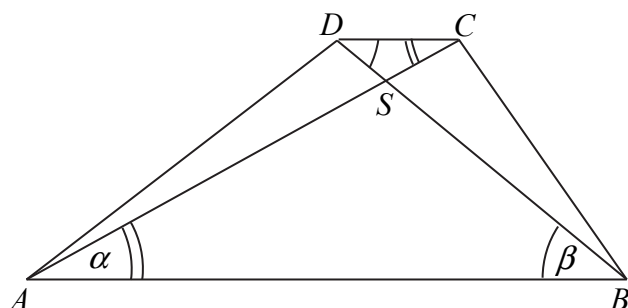
**Zadanie 30. (0–2)**

W trapezie  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  przekątne  $AC$  oraz  $BD$  przecinają się w punkcie  $S$ .

Wykaż, że jeżeli  $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$ , to pole trójkąta  $ABS$  jest 25 razy większe od pola trójkąta  $DCS$ .

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąty  $ABS$  i  $DCS$  są podobne, gdyż kąty  $ASB$  i  $CSD$  są równe, jako kąty wierzchołkowe, natomiast naprzemianległe kąty  $SAB$  i  $SCD$  są równe, bo proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe, podobnie kąty  $ABS$  i  $SDC$  są równe.

Stąd, że  $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$ , wynika równość  $|CS| = \frac{1}{6}|AC|$ . Skala podobieństwa trójkąta  $ABS$  do trójkąta  $CDS$  jest równa

$$k = \frac{|AS|}{|CS|} = \frac{\frac{5}{6}|AC|}{\frac{1}{6}|AC|} = 5.$$

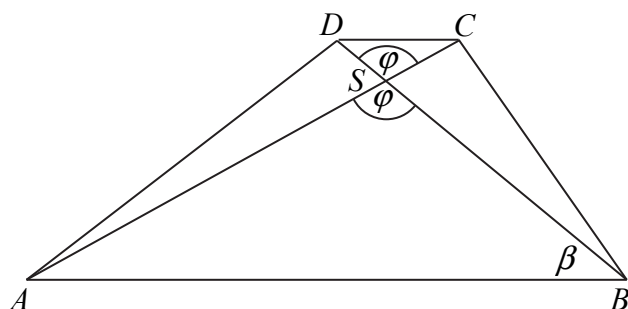
Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = k^2, \text{ zatem } P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS}.$$

To należało wykazać.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Kąty  $ASB$  i  $CSD$  to kąty wierzchołkowe, więc są równe.

Ponieważ  $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$ , więc  $|CS| = \frac{1}{6}|AC|$ .

Proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe, więc z twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcję

$$\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|BS|}{|DS|}.$$

Stąd i ze wzoru na „pole trójkąta z sinusem”, otrzymujemy

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \varphi}{\frac{1}{2} \cdot |CS| \cdot |DS| \cdot \sin \varphi} = \frac{|AS| \cdot |BS|}{|CS| \cdot |DS|} = \left( \frac{|AS|}{|CS|} \right)^2 = \left( \frac{\frac{5}{6}|AC|}{\frac{1}{6}|AC|} \right)^2 = 25,$$

czyli  $P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS}$ , co należało wykazać.

#### Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- zapisze, że trójkąty  $ABS$  i  $CDS$  są podobne oraz wyznaczy skalę ich podobieństwa:  
 $k = 5$

albo

- wyznaczy pola trójkątów  $ABS$  i  $CDS$  w zależności od sinusa tego samego kąta i zapisze proporcję wynikającą z twierdzenia Talesa:  $P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin \varphi$ ,

$$P_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot |CS| \cdot |DS| \cdot \sin \varphi, \quad \frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|BS|}{|DS|}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy wykaże, że  $P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS}$ .

#### Uwaga

Jeżeli zdający przyjmie konkretne długości odcinków, np.  $|AC| = 6$  i  $|AS| = 5$ , to otrzymuje **0 punktów**.

#### Zadanie 31. (0–4)

Ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określony jest wzorem  $a_n = 2016 - 3n$ , dla  $n \geq 1$ . Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

#### Rozwiązanie

Pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$  jest równy  $a_1 = 2013$ , a każdy inny wyraz tego ciągu jest o 3 mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.

Mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym o różnicy  $r = -3$ .

Wyznamy liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :

$$\begin{aligned} a_n &> 0, \\ 2016 - 3n &> 0, \\ n &< \frac{2016}{3}, \text{ a stąd } n < 672. \end{aligned}$$

Zatem  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{671}$  to wszystkie dodatnie wyrazy tego ciągu. Obliczmy ich sumę:

$$\begin{aligned} S_{671} &= \frac{a_1 + a_{671}}{2} \cdot 671 \text{ i } a_{671} = 2016 - 3 \cdot 671 = 3, \\ S_{671} &= \frac{2013 + 3}{2} \cdot 671 = 676\,368. \end{aligned}$$

#### Uwaga

Możemy obliczyć sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu, korzystając ze wzoru:

$$\begin{aligned} S_{671} &= \frac{2a_1 + 670r}{2} \cdot 671. \\ S_{671} &= \frac{2 \cdot 2013 + 670 \cdot (-3)}{2} \cdot 671 = \frac{4026 - 2010}{2} \cdot 671 = 1008 \cdot 671 = 676\,368. \end{aligned}$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2013$

albo

- zapisze różnicę ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ :  $r = -3$ ,

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ : np.  $2016 - 3n > 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz i ciągu  $(a_n)$  oraz zapisze jego różnicę:  $a_1 = 2013$  i  $r = -3$

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ : np.  $2016 - 3n > 0$  i zapisze różnicę ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ :  $r = -3$ ,

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ : np.  $2016 - 3n > 0$  i obliczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2013$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$  i obliczy liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2013$ ,  $n = 671$

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2013$  oraz wyznaczy najmniejszy dodatni wyraz tego ciągu: 3,

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = 2013$  oraz wyznaczy numer wyrazu równego 0:  $n = 672$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

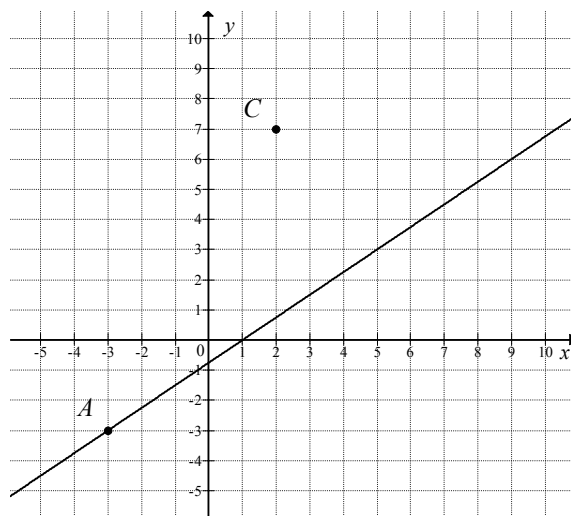
Zdający obliczy sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu  $(a_n)$ :  $S_{671} = 676\,368$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający zauważy, że wyraz  $a_{672} = 0$  i obliczy sumę  $S_{672} = 676\,368$ , to może otrzymać maksymalną liczbę punktów, o ile nie popełni błędu w przedstawionym rozwiązaniu.
2. Jeżeli zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$ , wyznaczy najmniejszy dodatni wyraz ciągu, ale błędnie ustali jego numer i konsekwentnie obliczy sumę  $\frac{2013+3}{2} \cdot 672 = 677\,376$ , to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 32. (0–4)**

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego  $ABC$ :  $A = (-3, -3)$  i  $C = (2, 7)$  oraz prosta o równaniu  $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ , zawierająca przeciwprostokątną  $AB$  tego trójkąta.



Oblicz współrzędne wierzchołka  $B$  tego trójkąta i długość odcinka  $AB$ .

**Rozwiązanie (I sposób)**

Współrzędne punktu  $B$  możemy obliczyć na kilka sposobów.

**Sposób a)**

Współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ , a więc prostej przechodzącej przez punkty  $A = (-3, -3)$  i  $C = (2, 7)$ , jest równy

$$a_{AC} = \frac{7+3}{2+3} = 2.$$

Prosta  $CB$  jest prostopadła do prostej  $AC$  i przechodzi przez punkt  $C = (2, 7)$ , więc ma równanie postaci

$$y = -\frac{1}{2}(x-2) + 7, \text{ czyli } y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

Współrzędne punktu  $B$  obliczymy rozwiązując układ równań  $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$  i  $y = -\frac{1}{2}x + 8$ . Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} &= -\frac{1}{2}x + 8, \\ 3x - 3 &= -2x + 32, \\ 5x &= 35 \\ x &= 7 \text{ oraz } y = -\frac{1}{2} \cdot 7 + 8 = 4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem  $B = (7, 4\frac{1}{2})$ .

**Sposób b)**

Wektory  $\overrightarrow{CA}$  i  $\overrightarrow{CB}$  są prostopadłe. Współrzędne wektora  $\overrightarrow{CA}$  są równe

$$\overrightarrow{CA} = [-3-2, -3-7] = [-5, -10].$$

Punkt  $B$  leży na prostej  $AB$ , więc jego współrzędne możemy zapisać w postaci  $B = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)$ . Zatem współrzędne wektora  $\overrightarrow{CB}$  są równe  $\overrightarrow{CB} = \left[x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right]$ .

Z warunku prostokątności wektorów  $\overrightarrow{CA}$  i  $\overrightarrow{CB}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} &= 0, \\ [-5, -10] \circ \left[x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right] &= 0, \\ -5(x - 2) - 10\left(\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right) &= 0, \\ (x - 2) + 2\left(\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right) &= 0, \\ \frac{5}{2}x - \frac{35}{2} &= 0, \\ 5x &= 35, \\ x &= 7.\end{aligned}$$

Zatem  $B = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$ .

### Sposób c)

Punkt  $B$  leży na prostej  $AB$ , więc jego współrzędne możemy zapisać w postaci

$B = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2, \\ \left(\sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 3\right)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(2+3)^2 + (7+3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 7\right)^2}\right)^2, \\ (x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right)^2 &= 5^2 + 10^2 + (x-2)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right)^2, \\ x^2 + 6x + 9 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{54}{16}x + \frac{81}{16} &= 125 + x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{186}{16}x + \frac{961}{16}, \\ x &= 7.\end{aligned}$$

Zatem  $B = \left(7, \frac{3}{4} \cdot 7 - \frac{3}{4}\right) = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$ .

Długość odcinka  $AB$  jest równa

$$|AB| = \sqrt{(7+3)^2 + \left(4\frac{1}{2} + 3\right)^2} = \sqrt{100 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{400+225}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = 2$

albo

- wyznaczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{CA} = [-5, -10]$ ,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora  $\overrightarrow{CB}$  w zależności od jednej zmiennej,

$$\text{np: } \overrightarrow{CB} = \left[x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}\right],$$

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze  $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$  oraz uzależni współrzędne punktu  $B$  od tej samej zmiennej: np.:  $B = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy

- równanie prostej  $BC$ :  $y = -\frac{1}{2}x + 8$

albo

- równanie z jedną niewiadomą wynikające z warunku prostokątności wektorów pozwalające obliczyć współrzędne punktu  $B$ : np.  $[-5, -10] \circ [x - 2, \frac{3}{4}x - \frac{31}{4}] = 0$  (lub układ równań  $[-5, -10] \circ [x - 2, y - 7] = 0$  i  $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ ),

albo

- równanie z jedną niewiadomą wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABC$ :

$$\left( \sqrt{(x+3)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + 3\right)^2} \right)^2 = \left( \sqrt{(2+3)^2 + (7+3)^2} \right)^2 + \left( \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} - 7\right)^2} \right)^2$$

lub układ równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} \left( \sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} \right)^2 = \left( \sqrt{(2+3)^2 + (7+3)^2} \right)^2 + \left( \sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2} \right)^2 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $B$ :  $B = (7, 4\frac{1}{2})$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $B$  oraz długość odcinka  $AB$ :  $B = (7, 4\frac{1}{2})$ ,  
 $|AB| = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie (II sposób)**

Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, więc środek  $S$  okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej  $AB$ . Jednocześnie leży on na symetralnej boku  $AC$ . Wyznaczamy najpierw równanie symetralnej boku  $AC$ . Jest to prosta prostopadła do prostej  $AC$  i przechodzi przez środek  $M$  odcinka  $AC$ . Ponieważ  $A = (-3, -3)$  i  $C = (2, 7)$ , więc punkt  $M$  ma współrzędne:

$$M = \left( \frac{-3+2}{2}, \frac{-3+7}{2} \right) = \left( \frac{-1}{2}, 2 \right),$$

a współczynnik kierunkowy prostej  $AC$  jest równy  $a_{AC} = \frac{7+3}{2+3} = 2$ , więc prosta  $AC$  ma równanie postaci

$$y = 2(x+3) - 3, \text{ czyli } y = 2x + 3.$$

Współczynnik kierunkowy symetralnej  $MS$  boku  $AC$  jest zatem równy  $a_{MS} = -\frac{1}{2}$ , a symetralna  $MS$  ma równanie postaci

$$y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2,$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Współrzędne środka  $S$  okręgu opisanego trójkącie  $ABC$  obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \text{ i } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Stąd

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4},$$

$$3x - 3 = -2x + 7,$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \text{ oraz } y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{7}{4} = \frac{3}{4}.$$

Zatem  $S = \left(2, \frac{3}{4}\right)$ .

Ponieważ  $S$  jest środkiem boku  $AB$ , to

$$S = \left(\frac{-3+x_B}{2}, \frac{-3+y_B}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{4}\right).$$

Stąd

$$\frac{-3+x_B}{2} = 2 \text{ i } \frac{-3+y_B}{2} = \frac{3}{4}$$

$$-3 + x_B = 4 \text{ i } -3 + y_B = \frac{3}{2}$$

$$x_B = 7 \text{ i } y_B = 4\frac{1}{2}.$$

Zatem  $B = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$ .

Długość odcinka  $AB$  jest równa

$$|AB| = \sqrt{(7+3)^2 + \left(4\frac{1}{2}+3\right)^2} = \sqrt{100 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{400+225}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający wyznaczy

- współczynnik kierunkowy prostej  $AC$ :  $a_{AC} = 2$

albo

- wyznaczy współrzędne środka  $M$  odcinka  $AC$ :  $M = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$  i zapisze, że środek okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  to punkt przecięcia symetralnej boku  $AC$  i prostej  $AB$ .

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne środka  $S$  okręgu opisanego trójkącie  $ABC$ :  $S = \left(2, \frac{3}{4}\right)$  i na

tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka  $B$  i nie obliczy długości boku  $AB$ :  $B = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$

albo

- obliczy długość boku  $AB$  i nie obliczy współrzędnych wierzchołka  $B$ :

$$|AB| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot 6\frac{1}{4} = 12\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

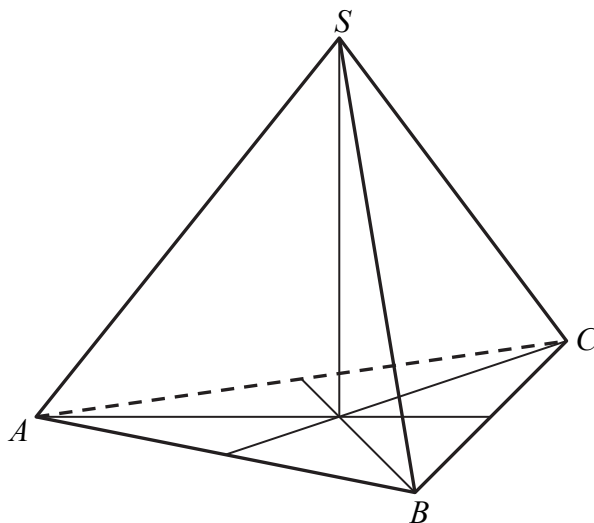
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $B$  oraz długość odcinka  $AB$ :  $B = (7, 4\frac{1}{2})$ ,  
 $|AB| = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje treść zadania, przyjmując, że wierzchołkiem kąta prostego trójkąta  $ABC$  jest  $B$ , to otrzymuje **0 punktów**.

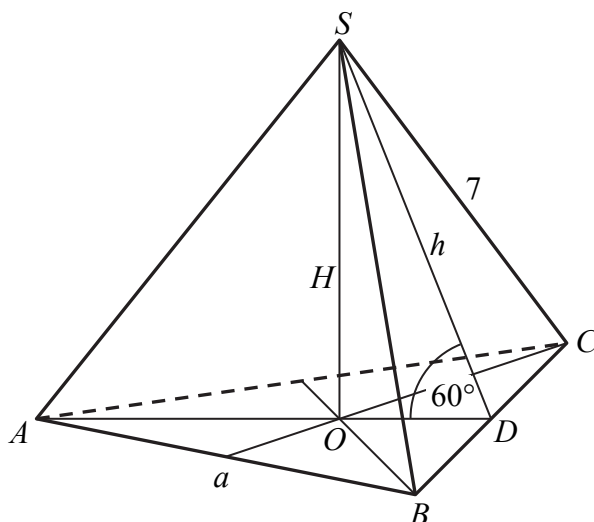
**Zadanie 33. (0–5)**

Trójkąt równoboczny  $ABC$  jest podstawą ostrosłupa prawidłowego  $ABCS$ , w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $60^\circ$ , a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



**Rozwiązanie I sposób**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku długości  $a$ , ostrosłup jest prawidłowy, więc spodek  $O$  wysokości  $SO$  tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego i opisanego na podstawie ostrosłupa.

Zatem

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $60^\circ$ , stąd otrzymujemy

$$\frac{H}{|OD|} = \operatorname{tg} 60^\circ,$$

$$\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3},$$

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3},$$

$$H = \frac{a}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $AOS$ , otrzymujemy

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2,$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 7^2,$$

$$\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = 49,$$

$$7a^2 = 49 \cdot 12,$$

$$a^2 = 7 \cdot 12,$$

$$a = 2\sqrt{21}.$$

Zatem  $H = \sqrt{21}$ .

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{(2\sqrt{21})^2\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = \frac{4 \cdot 21\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = 21\sqrt{7}.$$

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

• zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa  
albo

• zapisze, że długość odcinka  $AO$ :  $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , gdzie  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa,  
albo

• zapisze, że długość odcinka  $OD$ :  $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , gdzie  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy w zależności od jednej zmiennej, np.  $a$  – długości krawędzi podstawy

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz długość odcinka  $AO$ :  $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz długość odcinka  $OD$ :  $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający wyznaczy wysokość ostrosłupa w zależności od jednej zmiennej, np.  $a$  – długości krawędzi podstawy:  $H = \frac{a}{2}$  i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa oraz długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub bezpośrednio pole podstawy ostrosłupa):  $H = \sqrt{21}$ ,  $a = 2\sqrt{21}$  i na tym zakończy lub dalej popęlni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

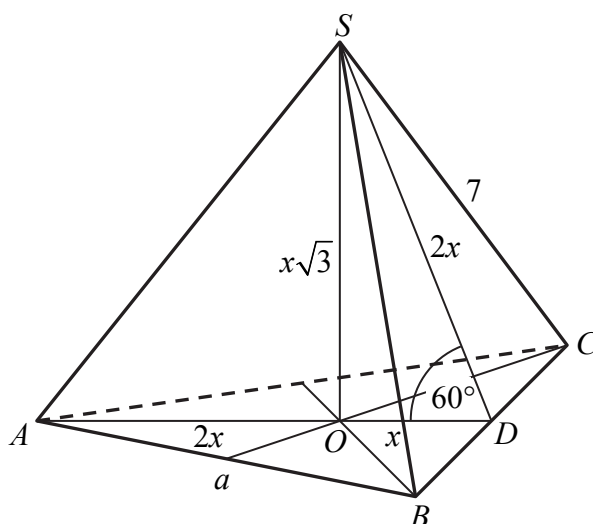
Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = 21\sqrt{7}$ .

#### Uwaga

Zdający nie musi zaznaczać kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, o ile z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje ten kąt.

#### Rozwiązanie II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt  $DOS$  jest prostokątny, w którym jeden kąt ostry ma miarę  $60^\circ$ . Wysokość  $SD$  ściany bocznej oznaczmy przez  $2x$ . Zatem

$$H = |SO| = x\sqrt{3} \text{ oraz } |OD| = x.$$

Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku długości  $a$ , ostrosłup jest prawidłowy, więc spodek  $O$  wysokości  $SO$  tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego i opisanego na podstawie ostrosłupa. Zatem

$$|AO| = 2x \text{ oraz } a = 2x\sqrt{3}.$$

Dla trójkąta  $AOS$  zapisujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy  $x$ :

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2,$$

$$(2x)^2 + (x\sqrt{3})^2 = 7^2,$$

$$4x^2 + 3x^2 = 49,$$

$$7x^2 = 49,$$

$$x = \sqrt{7}.$$

Zatem  $H = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$  oraz  $a = 2x\sqrt{3} = 2\sqrt{21}$ .

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{(2\sqrt{21})^2 \sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = \frac{4 \cdot 21 \sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = 21\sqrt{7}.$$

#### Uwaga

Zdający może podać wynik w postaci  $V \approx 55,56$ .

#### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa albo
  - zapisze zależność między długościami odcinków  $OA$  i  $OD$ , np.  $|OD| = x$ ,  $|OA| = 2x$ , gdzie  $x$  – pół wysokości ściany bocznej,
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy w zależności od jednej zmiennej, np.  $x$  – pół wysokości ściany bocznej,

- wysokość ostrosłupa  $SO$ :  $|SO| = H = x\sqrt{3}$
- albo
- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz zapisze zależność między długościami odcinków  $OA$  i  $OD$ , np.  $|OD| = x$ ,  $|OA| = 2x$
- i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający wyznaczy długość  $a$  krawędzi podstawy ostrosłupa w zależności od  $x$ :  $a = 2x\sqrt{3}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa oraz długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub bezpośrednio pole podstawy ostrosłupa):  $H = \sqrt{21}$ ,  $a = 2\sqrt{21}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = 21\sqrt{7}$ .

**Uwaga**

Zdający nie musi zaznaczać kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, o ile z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje ten kąt.

**Zadanie 34. (0–2)**

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Niech zdarzeniami elementarnymi będą uporządkowane pary  $(a, b)$  liczb z podanego zbioru, takie że  $a \neq b$ . Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$ .

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb, z których większą jest liczba 5.

Zdarzeniu  $A$  sprzyja osiem zdarzeń elementarnych

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

**Rozwiązanie (II sposób)**

Niech zdarzeniami elementarnymi będą dwuelementowe podzbiory  $\{a, b\}$  liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = \binom{7}{2} = 21.$$

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb, z których większą jest liczba 5.

Zdarzenia  $A$  sprzyjają cztery zdarzenia elementarne

$$A = \{\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe:

$$P(A) = \frac{4}{21}.$$

**Uwaga**

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$  możemy też zapisać w tabeli.

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |   | ☺ |   |   |
| 2 |   |   |   |   | ☺ |   |   |
| 3 |   |   |   |   | ☺ |   |   |
| 4 |   |   |   |   | ☺ |   |   |
| 5 | ☺ | ☺ | ☺ | ☺ |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |
| 7 |   |   |   |   |   |   |   |

Symbol ☺ użyty w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ .

Wówczas  $|\Omega| = 7^2 - 7 = 42$  i  $|A| = 8$ . Zatem  $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$ .

### Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych:  $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$  (lub  $|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$ )

albo

- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzenia  $A$ :  $|A| = 8$  (lub  $|A| = 4$ ).

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

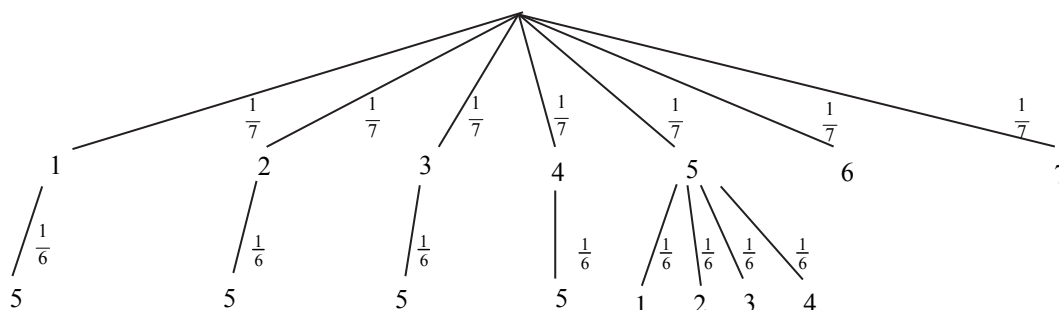
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$ .

### Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$  lub  $P(A) < 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd przy zliczaniu w tabeli par, spełniających warunki zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze **tylko**  $P(A) = \frac{8}{42}$ , to otrzymuje **1 punkt**.

### Rozwiązanie (III sposób)

Niech  $A$  oznacza zdarzenie – większa z wylosowanych liczb jest równa 5. Narysujmy drzewo zawierające tylko istotne gałęzie



Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest równe

$$P(A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

### Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy narysuje pełne drzewo oraz przynajmniej na jednej gałęzi zapisze poprawne prawdopodobieństwo i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{4}{21}$ .

### Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma  $P(A) > 1$  lub  $P(A) < 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeśli zdający dodaje prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt** (pod warunkiem, że prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa są zapisane prawidłowo).
3. Jeżeli zdający popełni błąd:
- przy przepisywaniu prawdopodobieństw z gałęzi drzewa
- lub
- w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa,
- lub
- nie zaznaczy jednej istotnej gałęzi drzewa
- i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.